狭义相对论

1. 相对论时空观

[**相对论的基本原理**]

(1). 相对性原理: 所有惯性系都是等价的;

(2). 光速不变原理: 真空中的光速相对于任何惯性系沿任一方向恒为 c, 并与光源运动无关.

[**光速不变性的数学表述**] $x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2$.

[**时空间隔**] $s^2=c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2$.

[**间隔不变性**] 设一惯性系观察两事件的时空间隔为 s^2, 另一惯性系观察同样两个事件的间隔为 s'^2, 有 $s^2=s'^2$.

[**洛伦兹变换**]

$$\text{洛伦兹正变换: }\begin{cases} x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y'=y, \qquad z'=z \\ t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases};\qquad \text{洛伦兹逆变换: }\begin{cases} x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y=y', \qquad z=z' \\ t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}.$$

[**洛伦兹变换的推导**]

设 Σ' 相对于 Σ 沿其 x 轴正方向以速度 v 运动, 两参考系均为惯性参考系, 惯性系间的变换具有线性.

$$\text{由光速不变性 } x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2 \text{ 设 }\begin{cases} x'=a_{11}t+a_{12}ct \\ y'=y, \qquad z'=z \\ ct'=a_{12}x+a_{22}ct \end{cases}$$

因 x' 与 x 同向, 所以 $a_{11}>0$. 因为两惯性系时间同向流动, 所以 $a_{22}>0$.

Σ 中一事件与 $(0,0,0,0)$ 的间隔为 $s^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2$, Σ' 中同一时间间隔为 $s'^2=c^2t'^2-x'^2-y'^2-z'^2$.

$$\text{由间隔不变性 } s^2=s'^2 \text{ 有 }\begin{cases} a_{11}^2-a_{21}^2=1 \\ a_{12}^2-a_{21}^2=-1 \\ a_{11}a_{12}-a_{21}a_{22}=0 \end{cases}, \text{解得 }\begin{cases} a_{11}=a22=\sqrt{1+a_{12}^2} \\ a_12=a_22 \end{cases}.$$

Σ 中的 O' 点在 t 时刻之后在 Σ 中的位置为 $x=vt$, 在 Σ' 中的位置仍然为 $x'=0$, 即 $0=a_{11}vt+a_{12}ct \Rightarrow \frac{a_12}{a_11}=-\frac{v}{c}$.

代入原方程解得 $\begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y, \qquad z' = z \\ t' = \frac{t-\frac{v}{c_2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$.

对于逆变换, 只有 v 的方向不同. 取 v 为 $-v$ 即可.

[**相对论的时空关系**]

(1). 类光间隔: $s^2 = 0$, 两事件可以用光波联系, 事件 B 位于 A 的光锥面上;

(2). 类时间隔: $s^2 > 0$, 两事件可用低于光速的作用来联系, 时间 B 位于 A 的光追之内;

i. 绝对未来: B 在 A 的上半光锥内;

ii. 绝对过去: B 在 A 的下半光锥内.

(3). 类空间隔: $s^2 < 0$, 两事件不可能用光波或低于光速的作用联系 (或 B 与 A 绝无联系), B 位于 A 的光锥之外.

[**证明因果律 (类时间隔的性质)**]

在 Σ 参考系上, 以 $(\vec{x}_1, t)$ 为原因事件, $(\vec{x}_2, t)$ 为结果事件, 且 $t_2 > t_1$.

将上述时间变换到 Σ' 参考系上, 有 $t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, 即 $t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}x_2 + \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

若因果律成立, 则必然有 $t_2' > t_1'$, 即 $t_2 - t_1 > \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)$ 成立.

即只需证 $\left|\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right| < \frac{c^2}{v}$ 成立.

设两事件间相互作用传递速度为 u, 有 $|x_2 - x_1| = u(t_2 - t_1)$, 即 $uv < c^2$.

当光速为物质运动的最大速度时, $u < c$, $v < c$. 上式一定成立. 因果律在光速为物质运动的最大速度时一定成立.

[**同时相对性 (类空间隔的性质)**] 具有类空间隔的两事件, 由于不可能发生因果关系, 其时间先后或同时都没有绝对意义, 因不同参考系而不同. 在不同地点同时发生的两件事不可能存在因果关系.

[**运动时钟延缓的推导**]

设 Σ' 为与物体固连的参考系, 观察到两事件发生的时刻为 t_1' 和 t_2', 则 $\Delta\tau = t_2' - t_1'$. 因两事件发生于同一位置, 所以 $\Delta s'^2 = c^2\Delta\tau^2$.

设 Σ 为相对于 Σ' 运动的参考系, 观察到两事件 $(\vec{x}_1, t^1)$ 和 $(\vec{x}_2, t_2)$, 则 $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{x}^2$.

设 Σ 相对于 Σ' 运动的速度为 v, 则 $\frac{|\Delta\vec{x}|}{\Delta t} = v$.

由间隔不变性 $c^2\Delta\tau^2 = c^2\Delta t^2 - v^2\Delta t^2$ 得 $\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

[**双生子佯谬**] 当一个时钟绕闭合路径做加速运动最后返回原地时, 它做经历的总时间小于在原地点静止时钟所经历的时间.

[**运动尺度缩短**] $l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

[**相对论速度变换**] $\begin{cases} u'_x=\frac{u_x-v}{1-\frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y=\frac{u_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z=\frac{u_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{vu_x}{c^2}} \end{cases}$, 非相对论极限 ($v\ll c$, $|u|\ll c$) 时: $\begin{cases} u_x\approx u'_x-v \\ u_y\approx u'_y \\ u_z\approx u'_z \end{cases}$.

逆变换只需取 v 为 $-v$ 即可.

[**相对论速度变换的推导**]

设 $u_x=\frac{dx}{dt}$, $u_y=\frac{dy}{dt}$, $u_z=\frac{dz}{dt}$ 为物体相对于 Σ 运动的速度. Σ' 相对于 Σ 沿其 x 轴以速度 v 运动.

$$\text{由洛伦兹变换}\begin{cases} x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y'=y, \qquad z'=z \\ t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \quad \text{得}\begin{cases} dx'=\frac{u_x-v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dt \\ dy'=u_ydt, \qquad dz'=u_zdt \\ dt'=\frac{1-\frac{v}{c^2}u_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dt \end{cases}.$$

$$\text{得}\begin{cases} u'_x=\frac{dx'}{dt}=\frac{u_x-v}{1-\frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y=\frac{dy'}{dt}=\frac{u_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z=\frac{dz'}{dt}=\frac{u_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{vu_x}{c^2}} \end{cases}.$$

[**沿 x 轴方向的洛伦兹变换矩阵**] $a=\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$, $\begin{cases} \beta=\frac{v}{c} \\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$, $(x_4=ict)$.

2. 相对论的四维形式

[**四维协变量**] 在洛伦兹变换下有确定变换性质的物理量.

[**四维速度矢量**] $U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma_\mu(u_1, u_2, u_3, ic)$.

由 $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma_\mu$ 和 $u_\mu = \frac{dx_\mu}{dt}$ 得 $U_\mu = \gamma_\mu(u_1, u_2, u_3, ic)$.

[**四维波矢量**] $k_\mu = (\vec{k}, i\frac{\omega}{c})$.

即 $\begin{cases} k'_x = \gamma(k_x - \frac{v}{c^2}\omega) \\ k'_y = k_y, \qquad k'_z = k_z \\ \omega' = \gamma(\omega - v k_x) \end{cases}$, $\begin{cases} k_x = \frac{\omega}{c}\cos\theta \\ k'_x = \frac{\omega'}{c}\cos\theta \end{cases}$, 其中: $\vec{k}$ 与 x 轴夹角为 θ, $\vec{k}'$ 与 x 轴夹角为 θ'.

[**相对论的多普勒效应**] $\omega' = \omega\gamma(1 - \frac{v}{c}\cos\theta)$.

[**相对论的光行差**] $\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \frac{v}{c})}$.

[**物理规律的相对论协变性**] 在参考系变换下方程形式不变的性质.

3. 电动力学的相对论不变性

[**电流密度四维矢量**] $J_\mu = (\vec{J}, ic\rho)$.

[**电荷守恒定律的四维形式**] $\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0$.

[**洛伦兹标量算符**] $\Box \equiv \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \vec{\nabla}^2 + \frac{\partial^2}{\partial (ict)^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}$.

[**四维势矢量**] $A_\mu = (\vec{A}, \frac{i}{c}\varphi)$, $\Box A_\mu = -\mu_0 J_\mu$.

[**洛伦兹条件**] $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0$.

[**电磁场张量**] $F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix}$.

[**麦克斯韦方程组的协变形式**] $\begin{cases} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 J_\mu \\ \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \end{cases}$

[**电磁场的变换关系（分量形式）**] $\begin{cases} E'_1 = E_1, \qquad B'_1 = B_1 \\ E'_2 = \gamma(E_2 - vB_3), \qquad B'_2 = \gamma(B_2 + \frac{v}{c^2}E_3) \\ E'_3 = \gamma(E_3 + vB_2), \qquad B'_3 = \gamma(B_3 - \frac{v}{c^2}E_2) \end{cases}$.

[**电磁场的变换关系 (矢量形式)**] $\begin{cases} \vec{E}'_{//} = \vec{E}_{//}, \qquad B'_{//} = \vec{B}_{//} \\ \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E} + v \times \vec{B})_{\perp}, \qquad \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E})_{\perp} \end{cases}$.

4. 相对论力学

[**四维动量矢量**] $p_\mu = m_0 U_\mu = (\vec{p}, p_4)$.

$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $p_4 = \gamma m_0 ic = \frac{i}{c} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

[p_4 **的低速展开**] $p_4 = \frac{i}{c}(m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + ...)$.

设物体中包含的能量为 $W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, 则 $p_4 = \frac{i}{c} W$, W 包含物体动能.

动能 $T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$. 物体的能量 $W = T + m_0 c^2$.

[**能量-动量四维矢量 (四维动量)**] $p_\mu = (\vec{p}, \frac{i}{c} W)$.

[**能量守恒**] $p_\mu p_\mu = \vec{p}^2 - \frac{W^2}{c^2} = -m_0 c^2$, $W = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^2}$.

[**动质量**] $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

[**质能关系**] $W = mc^2$.

[**四维力矢量**] $K_\mu = (\vec{K}, \frac{i}{c} \frac{dW}{d\tau}) = (\vec{K}, \frac{i}{c} \vec{K} \cdot \vec{v})$.

力 (不使用固有时): $\vec{F} = \frac{1}{\gamma} \vec{K} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \vec{K}$.

[**相对论力学方程**] $\begin{cases} \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dW}{dt} \end{cases}$.

[**洛伦兹力的相对论形式**] $\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$.

[**洛伦兹力密度**] $f_\mu = (\vec{f}, f_4)$.

$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}$, $f_4 = \frac{i}{c} \vec{J} \cdot \vec{E}$.