电磁波的传播

1. 无界空间中的平面电磁波

[**自由空间中的麦克斯韦方程组**] $\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$.

[**真空中的光速**] $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$.

[**电场波动方程**] $\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

[**磁场波动方程**] $\vec{\nabla}^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

[**线性介质中电磁场与频率关系**] $\begin{cases} \vec{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \vec{E}(\omega) \\ \vec{B}(\omega) = \mu(\omega) \vec{H}(\omega) \end{cases}$.

[**介质的色散**] ε 和 μ 随频率而变的现象.

[**时谐电磁波 (单色波)**] 以一定频率作正弦振荡的电磁波.

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(\vec{x}) e^{-i\omega t} \\ \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}(\vec{x}) e^{-i\omega t} \end{cases}.$$

[**时协情形下自由空间的麦克斯韦方程组**] $\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega\mu \vec{H} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = -i\omega\varepsilon \vec{E} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \end{cases}$, 只有两个旋度方程独立.

[**波矢量**] $|\vec{k}| = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$.

[**亥姆霍兹方程**] $\begin{cases} \vec{\nabla}^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = \vec{0} \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0) \\ \vec{\nabla}^2 \vec{B} + k^2 \vec{B} = \vec{0} \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0) \end{cases}$.

[**电磁波中电磁场的关系**] $\begin{cases} \vec{B} = -\frac{i}{\omega} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{i}{k}\sqrt{\mu\varepsilon} \vec{\nabla} \times \vec{E} \\ \vec{E} = \frac{i}{\omega\mu\varepsilon} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{i}{k\sqrt{\mu\varepsilon}} \vec{\nabla} \times \vec{B} \end{cases}$.

[**平面电磁波**] 电磁波沿 x 轴方向传播, 其场强在与 x 轴正交的平面上各点具有相同值. 即 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 仅与 x 和 t 有关, 与 y 和 z 无关.

[**平面电磁波的方程**] $\frac{d^2}{dx^2}\vec{E}(\vec{x})+k^2\vec{E}(\vec{x})=\vec{0}$, 解为 $\vec{E}(\vec{x})=\vec{E}_0e^{ikx}$.

[**平面电磁波解的时谐情况**] $\vec{E}(\vec{x})=\vec{E}_0e^{i(kx-\omega t)}$.

电场振幅: $\vec{E}_0$;

波动相位因子: $e^{i(kx-\omega t)}$;

注意: 实际电场只取实部: $\vec{E}(\vec{x})=\vec{E}_0\cos{(kx-\omega t)}$.

[**平面电磁波电场无传播方向分量**] $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0\Rightarrow E_x=0$.

[**相位因子的意义**]

(1). $t=0$ 时, $x=0$ 平面处于波峰;

(2). t 时刻, 波峰移动至 $kx-\omega t=0$ 处, 即 $x=\frac{\omega}{k}t$ 平面;

(3). 平面电磁波相速度为 $v=\frac{\omega}{k}$;

i. 线性均匀绝缘介质内平面电磁波相速度为 $v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$;

ii. 真空中平面电磁波相速度为 $c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$;

iii. 线性均匀绝缘介质中单色平面电磁波相速度为 $v=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}=\frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}=\frac{c}{n}$, ($n$ 为折射率).

[**真空中波矢的性质 (波数)**] $|\vec{k}|=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=\frac{2\pi f}{c}=\frac{2\pi}{\lambda}$

[**一般坐标系下平面电磁波解的表达式**] $\vec{E}(\vec{x},t)=\vec{E}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$.

[**电磁波的偏振方向**] $\vec{E}$ 的取向.

[**平面电磁波的性质**]

(1). 平面电磁波是横波, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0\Rightarrow\vec{k}\cdot\vec{E}=0$;

(2). $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 相互垂直, $\vec{B}=\sqrt{\mu\varepsilon}\vec{e}_k\times\vec{E}\Rightarrow\hat{\vec{E}}\times\hat{\vec{B}}=\hat{\vec{e}_k}$;

(3). $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 同相, $\left|\frac{\vec{E}}{\vec{B}}\right|=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=v$(真空中 $\left|\frac{\vec{E}}{\vec{B}}\right|=c$).

[**线性均匀介质中平面电磁波的能量密度**] $w=\varepsilon E^2=\frac{1}{\mu}B^2=\varepsilon E_0^2\cos{}^2(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)=\frac{1}{\mu}B_0^2\cos{}^2(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)$

[**线性均匀介质中平面电磁波的能流密度 (坡印亭矢量)**] $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\frac{\vec{k}}{k}=vw\vec{e}_k$.

[**二次周期式的平均值**] 当 $f(t)=f_0e^{-i\omega t}$, $g(t)=g_0e^{-i\omega t+i\phi}$ 时, 平均值 $\bar{f}g=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}f_0g_0\cos\omega t\cdot\cos{(\omega t-\phi)}dt=\frac{1}{2}f_0g_0\cos\phi=\frac{1}{2}Re(f^*g)$.

[**平面电磁波在线性均匀绝缘介质中平均能量与能流密度**] $\begin{cases}\bar{w}=\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2=\frac{1}{2\mu}B_0^2\\ \bar{\vec{S}}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\bar{E_0^2}\vec{e}_k=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2\vec{e}_k\end{cases}$.

2. 边界上电磁波的传播

[**介质面上的波矢**] $\vec{k}\cdot\vec{x}=\vec{k}'\cdot\vec{x}=\vec{k}''\cdot\vec{x}$.

$$\text{当 } z=0 \text{ 平面为界面时,}\begin{cases}k_x=k'_x=k''_x\\ k_y=k'_y=k''_y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\sin\theta=k'\sin\theta'=k''\sin\theta''\\ k\cos\theta=k'\cos\theta'=k''\cos\theta''\end{cases}.$$

[**反射定律**] $\frac{\sin\theta}{\sin\theta'}=1\Rightarrow\theta'=\theta$.

[**折射定律**] $\frac{\sin\theta}{\sin\theta''}=\frac{k''}{k}=\frac{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}}=n_{21}$.

[**折射率**] n_{21} 表示介质 2 相对介质 1 的折射率. 除铁磁介质外, 一般有 $\mu\approx\mu_0$, 因此通常 $n_{21}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$.

[$\vec{E}$ **垂直于入射面 (平行于界面) 的菲涅尔公式**]

反射: $\frac{E'}{E}=\frac{\sqrt{\mu_2\varepsilon_1}\cos\theta-\sqrt{\mu_1\varepsilon_2}\cos\theta''}{\sqrt{\mu_2\varepsilon_1}\cos\theta+\sqrt{\mu_1\varepsilon_2}\cos\theta''}$

非铁磁近似 $(\mu\approx\mu_0)$: $\frac{E'}{E}\approx-\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')}$;

折射: $\frac{E''}{E}=\frac{2\sqrt{\mu_2\varepsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\mu_2\varepsilon_1}\cos\theta+\sqrt{\mu_1\varepsilon_2}\cos\theta''}$

非铁磁近似 $(\mu\approx\mu_0)$: $\frac{E''}{E}\approx\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')}$.

[$\vec{E}$ **平行于入射面的菲涅耳公式**]

反射: $\frac{E'}{E}=\frac{\sqrt{\mu_1\varepsilon_2}\cos\theta-\sqrt{\mu_2\varepsilon_1}\cos\theta''}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_2}\cos\theta+\sqrt{\mu_2\varepsilon_1}\cos\theta''}$

非铁磁近似 $(\mu\approx\mu_0)$: $\frac{E'}{E}\approx\frac{\tan(\theta-\theta'')}{\tan(\theta+\theta'')}$;

折射: $\frac{E''}{E}=\frac{2\sqrt{\mu_2\varepsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\mu_1\varepsilon_2}\cos\theta+\sqrt{\mu_2\varepsilon_1}\cos\theta''}$

非铁磁近似 $(\mu\approx\mu_0)$: $\frac{E''}{E}\approx\frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')}$.

[**自然光经折射或反射后会变味部分偏振光 (两个偏振分量强度不同)**].

[**布儒斯特定律**] 在 $\theta+\theta''=\frac{\pi}{2}$ 时, $\vec{E}$ 平行于入射面的分量没有反射波, 反射光变为垂直于入射面偏振的完全偏振光.

[**布儒斯特角**] $\theta=\frac{\pi}{2}-\theta''$.

[**半波损失**] 在 $\vec{E}$ 垂直于入射面时, 若 $\theta>\theta''$(即 $\varepsilon_2>\varepsilon_1$), 则 $\frac{E'}{E}<0$(即反射波电场与入射波电场反相).

[**全反射条件**]

(1). $\varepsilon_1>\varepsilon_2,(n_{21}<1)$;

(2). $\sin\theta>n_{21}$.

[**全反射情形下亥姆霍兹方程的解**]

全反射时: $\sin\theta''=1$

由 $k''_x=k_x$ 得 $k''_x=k\sin\theta$, 临界时 $k''_x=kn_{21}$

当 θ 超过临界角时, $k''_x>kn_{21}$

因 $k''_y=0$, 故 k''_z 非零.

由 $k''^2=k''^2_x+k''^2_y+k''^2_z$ 得 $k''_z=\sqrt{k''^2-k''^2_x}$

因 $k''_x>k''$, 有 $k''_z=i\sqrt{k''^2_x-k''^2}=ik\sqrt{\left(\frac{k''_x}{k}\right)^2-\left(\frac{k''}{k}\right)^2}$

由 $k''_x=k\sin\theta$, $\frac{k''}{k}=\frac{\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}{\mu_1\varepsilon_1}=n_{21}$, 得 $k''_z=ik\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}$

令 $k''_z=i\kappa$, $\kappa=k\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}$, 有 $\vec{E}''=\vec{E}''_0e^{i(k''_xx+i\kappa z-\omega t)}=\vec{E}''_0e^{-\kappa z}e^{i(k''_xx-\omega t)}$

$\vec{E}''$ 沿 x 轴方向传播, 沿 z 轴指数衰减.

设当 $\vec{E}''$ 沿 z 衰减到 e^{-1} 时的深度为截止深度: $z_c=\kappa^{-1}=\frac{1}{k\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}}=\frac{\lambda_1}{2\pi\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}}$

[**全反射情形下 $\vec{E}''$ 垂直于入射面 (平行于界面) 时的 $\vec{H}''$**]

此时 $E''=E''_y$, 由 $\vec{H}''=\frac{1}{\mu_2}$ 得:

$$H''_z=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\frac{k''_x}{k''}E''_y=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\frac{\sin\theta}{n_{21}}E''$$

$$H''_x=-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\frac{k''_z}{k''}E''_y=-i\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\sqrt{\left(\frac{\sin\theta}{n_{21}}\right)^2-1}E''$$

(1). H''_z 与 E'' 同相;

(2). H''_x 与 E'' 有 $\frac{\pi}{2}$ 相位差.

[**全反射情形下折射波的平均能流密度**]

(1). $\bar{S}''_x=\frac{1}{2}Re(E''^*_yH''_z)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\frac{\sin\theta}{n_{21}}|E''_0|^2e^{-2\kappa z}$;

(2). $\bar{S}''_z=\frac{1}{2}Re(E''^*_yH''_x)=0$.

[**全反射情形下的菲涅耳公式 (非铁磁近似) 变换**]

$$\begin{cases}\sin\theta''\to\frac{k''_x}{k''}=\frac{\sin\theta}{n_{21}}\\ \cos\theta''\to\frac{k''_z}{k''}=i\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n_{21}^2}-1}\end{cases}$$

当 $\vec{E}$ 垂直于入射面时: $\begin{cases}\frac{E'}{E}=\frac{\cos\theta-i\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}}{\cos\theta+i\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}}=e^{-2i\phi}\\ \tan\phi=\frac{\sqrt{\sin^2\theta-n_{21}^2}}{\cos\theta}\end{cases}$.

[**全反射下菲涅耳公式中相移产生的原因**] S''_z 的平均值为零但瞬时值不为零, 电磁能量在界面附近的薄层内储存起来, 在另一半周期内释放为反射波能量.

3. 有导体存在时电磁波的传播

[**良导体**] 导体内部没有净自由电荷积累, 电荷只分布于导体表面上.

[**良导体条件**] $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1$.

由 $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho$ 得 $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$

导体中由欧姆定律 $\vec{J}=\sigma\vec{E}$ 得 $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=\sigma\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\sigma\rho}{\varepsilon}$

由电流连续性 $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ 得 $\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\sigma\rho}{\varepsilon}$, 解得 $\rho(t)=\rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$

当到达弛豫时间 (特征时间)τ 时, $\rho=\rho_0 e^{-1}$, 得 $\tau=\frac{\varepsilon}{\sigma}$

当 $\omega << \frac{1}{\tau}$(即 $\omega << \frac{\sigma}{\varepsilon}$) 时, $\rho\to 0$, 即认为导体为良导体

良导体条件为 $\omega << \frac{\sigma}{\varepsilon}$ 或 $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1$.

[**良导体内的麦克斯韦方程组**] $\begin{cases}\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{H}=0\end{cases}$

[**良导体内时谐情形下的麦克斯韦方程组**] $\begin{cases}\vec{\nabla}\times\vec{E}=i\omega\mu\vec{H}\\ \vec{\nabla}\times\vec{H}=\sigma\vec{E}-i\omega\varepsilon\vec{E}\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{H}=0\end{cases}$

[**复电容率**] $\varepsilon'=\varepsilon+i\frac{\sigma}{\omega}$, 使 $\vec{\nabla}\times\vec{H}=-i\omega\varepsilon'\vec{E}$.

[**复电容率的物理意义**]

在 $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\sigma\vec{E}-i\omega\varepsilon\vec{E}$ 中, 传导电流 $\sigma\vec{E}$ 与 $\vec{E}$ 同相, 耗散功率密度为 $\frac{1}{2}Re(\vec{J}^*\cdot\vec{E})=\frac{1}{2}\sigma E_0^2$. 位移电流 $-i\omega\varepsilon\vec{E}$ 与电场正交 (存在 $\frac{\pi}{2}$ 相位差), 不消耗功率;

在复电容率 ε' 中, 实部 ε 代表位移电流贡献, 在 $\vec{\nabla}\times\vec{H}=-i\omega\varepsilon'\vec{E}$ 中无功率耗散. 虚部 $\frac{\sigma}{\omega}$ 是传导电流贡献, 有功率耗散.

[**导体内亥姆霍兹方程及解**]

$$\begin{cases}\vec{\nabla}^2\vec{E}+k^2\vec{E}=\vec{0}\\ k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0\end{cases}, \text{解得: } \vec{E}=\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \vec{k}=\vec{\beta}+i\vec{\alpha}$$

即 $\vec{E}=\vec{E}_0 e^{-\vec{\alpha}\cdot\vec{x}}e^{i(\vec{\beta}\cdot\vec{x}-\omega t)}$

[**导体内亥姆霍斯方程解的意义**]

衰减常数: $\vec{\alpha}$;

相位常数: $\vec{\beta}$.

$$\begin{cases}\beta^2-\alpha^2=\omega^2\mu\varepsilon\\ \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma\end{cases}\quad ,\ \vec{\alpha}\text{ 与 }\vec{\beta}\text{ 方向不常一致.}$$

[**垂直入射导体的衰减常数和相位常数**]

$$\begin{cases}\alpha=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}+1}-1\right)}\\ \beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}+1}+1\right)}\end{cases}\quad ,\text{良导体近似: }\begin{cases}\alpha\approx\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}\\ \beta\approx\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}\end{cases}$$

[**穿透深度**] $\delta=\frac{1}{\alpha}\approx\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$.

[**趋肤效应**] 对高频电磁波, 电磁场以及与之相互作用的高频电流仅集中于表面薄层内.

[**垂直入射导体情形下的磁场**] $\vec{H}=\frac{1}{\omega\mu}\vec{k}\times\vec{E}=\frac{1}{\omega\mu}(\vec{\beta}+i\vec{\alpha})\times\vec{E}=\frac{1}{\omega\mu}(\beta+i\alpha)\vec{e}_n\times\vec{E}$.

良导体近似: $\vec{H}\approx\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}}(1+i)\vec{e}_n\times\vec{E}=\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}}e^{i\frac{\pi}{4}}\vec{e}_n\times\vec{E}$, 磁场比电场滞后 $\frac{\pi}{4}$.

[**良导体中磁场与电场强度之比**] $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left|\frac{H}{E}\right|=\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}>>1$.

[**导体反射电场**] $\frac{E'}{E}=-\frac{1+i-\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}{1+i+\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}}$.

[**反射系数**] $R=\left|\frac{E'}{E}\right|^2=\frac{\left(1-\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}\right)^2+1}{\left(1+\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}\right)^2+1}$.

良导体近似: $R\approx1-2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}$.

4. 有界空间的电磁波

[**理想导体边界**] 导体表面上, 电场线与界面正交, 磁感线与界面相切.

$$\begin{cases} \vec{e}_n \times \vec{E} = \vec{0} \\ \vec{e}_n \times \vec{H} = \vec{\alpha} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (\frac{\partial E_n}{\partial n} = 0) \end{cases} \text{, 法线由导体指向介质.}$$

[**波动方程 $\vec{\nabla}^2 u + k^2 u = 0$ 的驻波解**]
$u(x,y,z) = (C_1 \cos k_x x + D_1 \sin k_x x)(C_2 \cos k_y y + D_2 \sin k_y y)(C_3 \cos k_z z + D_3 \sin k_z z)$.

[**谐振腔电场的解**] $\begin{cases} E_x(x,y,z) = A_1 \cos \frac{m\pi}{L_1} x \sin \frac{n\pi}{L_2} y \sin \frac{p\pi}{L_3} z \\ E_y(x,y,z) = A_2 \sin \frac{m\pi}{L_1} x \cos \frac{n\pi}{L_2} y \sin \frac{p\pi}{L_3} z \\ E_z(x,y,z) = A_3 \sin \frac{m\pi}{L_1} x \sin \frac{n\pi}{L_2} y \cos \frac{p\pi}{L_3} z \end{cases}$, $m,n,p \in Z$.

[**谐振腔的半波数目**] $m: k_x = \frac{m\pi}{L_1}$, $n: k_y = \frac{n\pi}{L_2}$, $p: k_z = \frac{p\pi}{L_3}$.

[**谐振腔方程**] $\begin{cases} k_x = \frac{m\pi}{L_1}, k_y = \frac{n\pi}{L_2}, k_z = \frac{p\pi}{L_3}, (m,n,p \in Z) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (k_x A_1 + k_y A_2 + k_z A_3 = 0) \end{cases}$.

[**谐振波模 (本征振荡)**] 满足谐振腔方程的电磁场. 对每一组 (m,n,p) 有两种独立的偏振波模.

[**谐振腔本征频率**] $\omega_{mnp} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{p}{L_3}\right)^2}$, 由 $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_2 = \omega^2 \mu\varepsilon$ 得出.

最低频率谐振波模: 当 $L_1 \geq L_2 \geq L_3$ 时为 $(1,1,0)$, 谐振频率 $f_{110} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2}}$, 谐振波长 $\lambda_{110} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2}}}$.

[**谐振波模的性质**] 当 m,n,p 中有两个为零时, $\vec{E} = 0$.

[**矩形波导中电场的解**] $\begin{cases} E_x(x,y,z) = A_1 \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{ik_z z} \\ E_y(x,y,z) = A_2 \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y e^{ik_z z} \\ E_z(x,y,z) = A_3 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{k_z z} \end{cases}$, $m,n,p \in Z$.

[**矩形波导的半波数目**] $m: k_x = \frac{m\pi}{a}$, $n: k_y = \frac{n\pi}{b}$.

[**矩形波导方程**] $\begin{cases} k_x = \frac{m\pi}{a}, k_y = \frac{n\pi}{b}, (m,n \in Z) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (k_x A_1 + k_y A_2 - ik_z A_3 = 0) \end{cases}$.

[**矩形波导中的磁场**] $\vec{H} = -\frac{i}{\omega\mu} \vec{\nabla} \times \vec{E}$.

[**横电波 (TE)**] $E_z=0$.

[**横磁波 (TM)**] $H_z=0$.

[**横电磁波 (TEM)**] $E_z=0, H_z=0$.

[**矩形波导截止频率**] $\omega_{c,mn}=\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}$.

最低截止频率: 当 $a>b$ 时, TE_{10} 波有 $\omega_{c,10}=\frac{\pi}{a\sqrt{\mu\varepsilon}}$, 截止频率 $f_{c,10}=\frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}}$, 真空时截止频率 $f_{c,10}=\frac{c}{2a}$(截止波长 $\lambda_{c,10}=2a$).

[**矩形波导中 TE_{10} 波的特点**]

$$\text{电场: }\begin{cases}E_x=E_z=0\\E_y=A_2\sin\frac{\pi}{a}xe^{ik_zz}\end{cases},\text{磁场: }\begin{cases}H_x=-\frac{k_z}{\omega\mu}A_2\sin\frac{\pi}{a}xe^{ik_zz}\\H_y=0\\H_z=-\frac{i\pi}{\omega\mu a}A_2\cos\frac{\pi}{a}xe^{ik_zz}\end{cases}.$$

设 H_z 振幅为 H_0, 则 $A_2=\frac{i\omega\mu a}{\pi}H_0$.

$$\text{电场: }\begin{cases}E_x=E_z=0\\E_y=\frac{i\omega\mu a}{\pi}H_0\sin\frac{\pi}{a}xe^{ik_zz}\end{cases},\text{磁场: }\begin{cases}H_x=-\frac{ik_za}{\pi}H_0\sin\frac{\pi}{a}xe^{ik_zz}\\H_y=0\\H_z=H_0\cos\frac{\pi}{a}xe^{ik_zz}\end{cases}.$$

[**矩形波导中 TE_{10} 波的管壁电流**] 由 $\vec{e}_n\times\vec{H}=\vec{\alpha}$ 知矩形波导中 TE_{10} 波产生的电流与磁感线正交, 没有纵向电流.