静磁场

1. 静磁场的方程

[**磁场的矢势**] $\int_s \vec{B}\cdot d\vec{S}=\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l}$, 微分形式 $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$.

[**矢势的任意性**] $\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{\nabla}\psi)$.

[**矢势规范条件**]

库伦规范: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$;

伦敦规范: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$, $\vec{e}_n\cdot\vec{A}|_s=0$;

洛仑兹规范: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}=0$.

[**矢势的微分方程**] $\vec{\nabla}^2\vec{A}=-\mu\vec{J}$.

由 $\vec{B}=\mu\vec{H}$ 和 $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$, 得 $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\mu\vec{\nabla}\times\vec{H}=\mu\vec{J}$

由库伦规范 $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$, 得 $\vec{\nabla}^2\vec{A}=-\mu_0\vec{J}$

$\vec{A}$ 的每个分量都有 $\vec{\nabla}^2A_i=-\mu J_i,(i=1,2,3)$, 有特解 $\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')}{r}dV'$

即 $\vec{B}=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')\times\vec{r}}{r^3}dV'$

[**矢势的边值关系**]

$$\begin{cases}\vec{e}_n\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}_2-\vec{\nabla}\times\vec{A}_1)=0\\ \vec{e}_n\times(\vec{\nabla}\times\frac{\vec{A}_2}{\mu_2}-\vec{\nabla}\times\frac{\vec{A}_1}{\mu_1})=\vec{\alpha}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A_{2t}=A_{1t}\\ A_{2n}=A_{1n}\end{cases}\Leftrightarrow\vec{A}_2=\vec{A}_1$$

[**引入磁标势的条件**] 区域内的任何回路都不被自由电流所链环, 即该区域是没有自由电流分布的单连通区域.

[**磁标势**] $\vec{H}=-\vec{\nabla}\varphi_m$.

[**磁标势法与静电场公式对比**]

$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\vec{0}$	$\vec{\nabla}\times\vec{H}=0$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho_f+\rho_p}{\varepsilon_0}$	$\vec{\nabla}\vec{H}=\frac{\rho_m}{\mu_0}$
$\rho_p=-\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$	$\rho_m=-\mu_0\vec{\nabla}\cdot\vec{M}$
$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$	$\vec{B}=\mu_0\vec{H}+\mu_0\vec{M}$
$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi$	$\vec{H}=-\vec{\nabla}\varphi_m$
$\vec{\nabla}^2\varphi=-\frac{\rho_f+\rho_p}{\varepsilon_0}$	$\vec{\nabla}^2\varphi_m=-\frac{\rho_m}{\mu_0}$

[**磁多极矩**]

$\vec{A}^{(0)}=0$, 不含磁单极项;

$\vec{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{R}}{R^3}$.

[**磁矩**] $\vec{m}=I\Delta\vec{S}=\frac{I}{2}\oint_L\vec{x}'\times d\vec{l}'=\frac{1}{2}\int_V\vec{x}'\times\vec{J}(\vec{x}')dV'$.

[**磁偶极矩的矢势推导**]

$\vec{A}^{(1)}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\vec{J}(\vec{x}')\vec{x}'\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{R}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\vec{J}(\vec{x}')\vec{x}'\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}dV'$

因为 R 与积分无关, 恒定电流具有连续性, 且积分路径有 $d\vec{x}'=d\vec{l}'$

所以 $\vec{A}^{(1)}=\frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\oint_L\vec{x}'\cdot\vec{R}d\vec{l}'$

因为全微分的闭合曲线积分与路径无关, $\oint_L d[(\vec{x}'\cdot\vec{R})\vec{x}']=\oint_L(\vec{x}'\cdot\vec{R})d\vec{l}'+\oint_L(d\vec{l}'\cdot\vec{R})\vec{x}'=0$

所以 $\oint_L\vec{x}'\cdot\vec{R}d\vec{l}'=-\oint_L d\vec{l}'\cdot\vec{R}\vec{x}'$

即 $\oint_L\vec{x}'\cdot\vec{R}d\vec{l}'=\frac{1}{2}\oint_L\left(\vec{x}'\cdot\vec{R}d\vec{l}'-d\vec{l}'\cdot\vec{R}\vec{x}'\right)=\frac{1}{2}\oint_L\vec{R}\times(d\vec{l}'\times\vec{x}')$

得到 $\vec{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi R^3}\frac{I}{2}\oint_L(\vec{x}'\times d\vec{l}')\times\vec{R}$

因为 $\frac{1}{2}\oint_L(\vec{x}'\times d\vec{l}')=\vec{S}$

所以 $\frac{I}{2}\oint_L(\vec{x}'\times d\vec{l}')=\vec{m}$

即 $\vec{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{R}}{R^3}$

[**磁偶极矩的磁场推导**]

$\vec{B}^{(1)}=\vec{\nabla}\times\vec{A}^{(1)}=\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\times(\vec{m}\times\frac{\vec{R}}{R^3})=-\frac{\mu_0}{4\pi}(\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\frac{\vec{R}}{R^3}$

由 $\vec{m}\times(\vec{\nabla}\times\frac{\vec{R}}{R^3})=\vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\frac{\vec{R}}{R^3})-(\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\frac{\vec{R}}{R^3}=0$

得 $\vec{B}^{(1)}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\frac{\vec{R}}{R^3})=-\mu_0\vec{\nabla}\frac{\vec{m}\cdot\vec{R}}{4\pi R^3}$

由 $\vec{H}=-\vec{\nabla}\varphi_m$, $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$

得 $\vec{B}^{(1)}=-\mu_0\vec{\nabla}\varphi_m$, $\varphi_m=\frac{\vec{m}\cdot\vec{R}}{4\pi R^3}$

2. 静磁场的能量

[**静磁场的能量**] $W=\frac{1}{2}\int_V\vec{B}\cdot\vec{H}dV$, $W=\frac{1}{2}\int_V\vec{A}\cdot\vec{J}dV$.

[**电流在外场中的能量**] $W=\frac{1}{2}\int_V\vec{J}\cdot\vec{A}_e dV$.

[**小区域电流在外场中的能量**] $W=\frac{1}{2}\left(I\oint_L\vec{A}_e\cdot d\vec{l}+I_e\oint_L\vec{A}\cdot d\vec{l}\right)=\frac{1}{2}\left(I\Phi_e+I_e\Phi\right)$.

增量 $\delta W=\frac{1}{2}\left(I\delta\Phi_e+I_e\delta\Phi\right)$.

[**磁偶极子的势函数**] $U=-W=-\int\vec{J}\cdot\vec{A}_e dV=-I\oint_L\vec{A}_e\cdot d\vec{l}=-I\int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=-\vec{m}\cdot\vec{B}$.

[**磁偶极子在外场受力**] $\vec{F}=-\vec{\nabla}U=\vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B}_e)=\vec{m}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}_e)+\vec{m}\cdot\vec{\nabla}\vec{B}_e$.

当外场电流不在 $\vec{m}$ 的区域内时, $\vec{\nabla}\times\vec{B}_e=\vec{0}$, 则 $\vec{F}=\vec{m}\cdot\vec{\nabla}\vec{B}_e$.

[**磁偶极子在外场中所受力矩**] $\vec{L}=\vec{m}\times\vec{B}_e$.

3. 超导体的电磁性质

[**阿哈罗诺夫-玻姆效应 (A-B 效应) 结论**] 磁场的物理效应不能完全用 $\vec{B}$ 描述.

[**超导体的基本性质**]

(1). **超导电性**: 当材料温度低于临界温度 T_c 时, 材料的电阻突然消失;

(2). **临界磁场**: 当材料处在超过临界磁场 $\vec{H}_c$ 的磁场中时, 材料由超导态转变为正常态;

a. 第一类超导体: 只有一个临界磁场, 当外场低于 $\vec{H}_c$ 时材料为超导态, 当外场 $\vec{H} \geq \vec{H}_c$ 时材料为正常态;

b. 第二类超导体: 有两个临界磁场, 当外场低于 $\vec{H}_{c1}$ 时材料为超导态; 当外场 $\vec{H}_{c1} < \vec{H} < \vec{H}_{c2}$ 时磁场以量子化磁通线形式进入材料内, 磁通线穿过的细长区域为正常态, 其余区域为超导态; 当外场大于 $\vec{H}_{c2}$ 时材料为正常态;

(3). **迈斯纳效应 (抗磁性)**: 随着进入超导体内部深度的增加, 磁场迅速衰减, 磁场主要存在于超导体表面一定厚度的薄层内.

a. 理想迈斯纳态: 对于宏观超导体, 可以将磁场进入超导体的深度看为趋于 0, 则近似认为超导体内部磁感应强度 $\vec{B} = \vec{0}$, 超导体具有完全抗磁性, 称为理想迈斯纳态;

b. 一般迈斯纳态: 不能理想化的超导体状态则为一般迈斯纳效应;

(4). **临界电流**: 当材料内部电流达到临界电流 I_c 时, 电流产生的磁场超过临界磁场, 超导体转变为正常态;

(5). **磁通量子化**: 对于第一类复连通超导体, 以及单连通或复连通的第二类超导体, 磁通量只能是基本值 $\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.07 \times 10^{-15} Wb$ 的整数倍. Φ_0 为磁通量子, h 为普朗克常量, e 为电子电荷量.

[**伦敦唯象理论**]

伦敦第一方程 $\frac{\partial \vec{J}_s}{\partial t} = \alpha \vec{E}$, $\alpha = \frac{n_s e^2}{m}$;

伦敦第二方程 $\vec{\nabla} \times \vec{J}_s = -\alpha \vec{B}$;

超导体内超导电流与矢势关系 $\vec{J}_s(\vec{x}) = -\alpha \vec{A}(\vec{x})$.

[**皮帕德非局域修正的原因**] 由于超导电流以库珀对为单元凝聚为量子态, 不同点上的超导电子相互关联, 使超导电流与电磁场的相互作用不再是局域的.