

# 狭义相对论

(第一次修订)

## 1. 相对论时空观

### [相对论的基本原理]

(1). 相对性原理: 所有惯性系都是等价的;

(2). 光速不变原理: 真空中的光速相对于任何惯性系沿任一方向恒为  $c$ , 并与光源运动无关.

[光速不变性的数学表述]  $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ .

[时空间隔]  $s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$ .

[间隔不变性] 设一惯性系观察两事件的时空间隔为  $s^2$ , 另一惯性系观察同样两个事件的间隔为  $s'^2$ , 有  $s^2 = s'^2$ .

### [洛伦兹变换]

$$\text{洛伦兹正变换: } \begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y, & z' = z \\ t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} ; \quad \text{洛伦兹逆变换: } \begin{cases} x = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y = y', & z = z' \\ t = \frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} .$$

### [洛伦兹变换的推导]

设  $\Sigma'$  相对于  $\Sigma$  沿其  $x$  轴正方向以速度  $v$  运动, 两参考系均为惯性参考系, 惯性系间的变换具有线性.

$$\text{由光速不变性 } x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \text{ 设 } \begin{cases} x' = a_{11}t + a_{12}ct \\ y' = y, & z' = z \\ ct' = a_{12}x + a_{22}ct \end{cases} .$$

因  $x'$  与  $x$  同向, 所以  $a_{11} > 0$ . 因为两惯性系时间同向流动, 所以  $a_{22} > 0$ .

$\Sigma$  中一事件与  $(0, 0, 0, 0)$  的间隔为  $s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ ,  $\Sigma'$  中同一时间间隔为  $s'^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$ .

$$\text{由间隔不变性 } s^2 = s'^2 \text{ 有 } \begin{cases} a_{11}^2 - a_{21}^2 = 1 \\ a_{12}^2 - a_{21}^2 = -1 \\ a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} = 0 \end{cases} , \text{ 解得 } \begin{cases} a_{11} = a_{22} = \sqrt{1 + a_{12}^2} \\ a_{12} = a_{22} \end{cases} .$$

$\Sigma$  中的  $O'$  点在  $t$  时刻之后在  $\Sigma$  中的位置为  $x = vt$ , 在  $\Sigma'$  中的位置仍然为  $x' = 0$ , 即  $0 = a_{11}vt + a_{12}ct \Rightarrow \frac{a_{12}}{a_{11}} = -\frac{v}{c}$ .

$$\text{代入原方程解得} \begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y, \quad z' = z \\ t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} .$$

对于逆变换, 只有  $v$  的方向不同. 取  $v$  为  $-v$  即可.

### [相对论的时空关系]

- (1). 类光间隔:  $s^2 = 0$ , 两事件可以用光波联系, 事件  $B$  位于  $A$  的光锥面上;
- (2). 类时间隔:  $s^2 > 0$ , 两事件可用低于光速的作用来联系, 事件  $B$  位于  $A$  的光锥之内;
  - i. 绝对未来:  $B$  在  $A$  的上半光锥内;
  - ii. 绝对过去:  $B$  在  $A$  的下半光锥内.

(3). 类空间隔:  $s^2 < 0$ , 两事件不可能用光波或低于光速的作用联系 (或  $B$  与  $A$  绝无联系),  $B$  位于  $A$  的光锥之外.

### [证明因果律 (类时间隔的性质)]

在  $\Sigma$  参考系上, 以  $(\vec{x}_1, t_1)$  为原因事件,  $(\vec{x}_2, t_2)$  为结果事件, 且  $t_2 > t_1$ .

将上述时间变换到  $\Sigma'$  参考系上, 有  $t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ ,  $t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ , 即  $t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}x_2 + \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ .

若因果律成立, 则必然有  $t'_2 > t'_1$ , 即  $t_2 - t_1 > \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)$  成立.

即只需证  $\left| \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right| < \frac{c^2}{v}$  成立.

设两事件间相互作用传递速度为  $u$ , 有  $|x_2 - x_1| = u(t_2 - t_1)$ , 即  $uv < c^2$ .

当光速为物质运动的最大速度时,  $u < c, v < c$ . 上式一定成立.

即因果律在光速为物质运动的最大速度时一定成立.

**[同时相对性 (类空间隔的性质)]** 具有类空间隔的两事件, 由于不可能发生因果关系, 其时间先后或同时都没有绝对意义, 因不同参考系而不同. 在不同地点同时发生的两件事不可能存在因果关系.

### [运动时钟延缓的推导]

设  $\Sigma'$  为与物体固连的参考系, 观察到两事件发生的时刻为  $t'_1$  和  $t'_2$ , 则  $\Delta\tau = t'_2 - t'_1$ . 因两事件发生于同一位置, 所以  $\Delta s'^2 = c^2\Delta\tau^2$ .

设  $\Sigma$  为相对于  $\Sigma'$  运动的参考系, 观察到两事件  $(\vec{x}_1, t_1)$  和  $(\vec{x}_2, t_2)$ , 则  $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{x}^2$ .

设  $\Sigma$  相对于  $\Sigma'$  运动的速度为  $v$ , 则  $\frac{|\Delta\vec{x}|}{\Delta t} = v$ .

由间隔不变性  $c^2\Delta\tau^2 = c^2\Delta t^2 - v^2\Delta t^2$  得  $\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ .

**[双生子佯谬]** 当一个时钟绕闭合路径做加速运动最后返回原地时, 它所经历的总时间小于在原地点静止时钟所经历的时间.

[运动尺度缩短]  $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ .

[相对论速度变换] 
$$\begin{cases} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \end{cases}, \text{非相对论极限 } (v \ll c, |u| \ll c) \text{ 时: } \begin{cases} u_x \approx u'_x - v \\ u_y \approx u'_y \\ u_z \approx u'_z \end{cases}.$$

逆变换只需取  $v$  为  $-v$  即可.

[相对论速度变换的推导]

设  $u_x = \frac{dx}{dt}$ ,  $u_y = \frac{dy}{dt}$ ,  $u_z = \frac{dz}{dt}$  为物体相对于  $\Sigma$  运动的速度.  $\Sigma'$  相对于  $\Sigma$  沿其  $x$  轴以速度  $v$  运动.

由洛伦兹变换 
$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y, \quad z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} dx' = \frac{u_x - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dt \\ dy' = u_y dt, \quad dz' = u_z dt \\ dt' = \frac{1 - \frac{v}{c^2}u_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dt \end{cases}.$$

得 
$$\begin{cases} u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \\ u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \end{cases}.$$

[沿  $x$  轴方向的洛伦兹变换矩阵]  $a = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \begin{cases} \beta = \frac{v}{c} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}, (x_4 = ict).$

## 2. 相对论的四维形式

[四维协变量] 在洛伦兹变换下有确定变换性质的物理量.

[四维速度矢量]  $U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma_\mu(u_1, u_2, u_3, ic)$ .

由  $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma_\mu$  和  $u_\mu = \frac{dx_\mu}{dt}$  得  $U_\mu = \gamma_\mu(u_1, u_2, u_3, ic)$ .

[四维波矢量]  $k_\mu = (\vec{k}, i\frac{\omega}{c})$ .

$$\text{即 } \begin{cases} k'_x = \gamma(k_x - \frac{v}{c^2}\omega) \\ k'_y = k_y, & k'_z = k_z \\ \omega' = \gamma(\omega - vk_x) \end{cases}, \begin{cases} k_x = \frac{\omega}{c} \cos \theta \\ k'_x = \frac{\omega'}{c} \cos \theta' \end{cases}, \text{ 其中: } \vec{k} \text{ 与 } x \text{ 轴夹角为 } \theta, \vec{k}' \text{ 与 } x \text{ 轴夹角为}$$

$\theta'$ .

[相对论的多普勒效应]  $\omega' = \omega\gamma(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)$ .

[相对论的光行差]  $\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta - \frac{v}{c})}$ .

[物理规律的相对论协变性] 在参考系变换下方程形式不变性质.

## 3. 电动力学的相对论不变性

[电流密度四维矢量]  $J_\mu = (\vec{J}, ic\rho)$ .

[电荷守恒定律的四维形式]  $\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0$ .

[洛伦兹标量算符]  $\square \equiv \vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \vec{\nabla}^2 + \frac{\partial^2}{\partial (ict)^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}$ .

[四维势矢量]  $A_\mu = (\vec{A}, \frac{i}{c}\varphi)$ ,  $\square A_\mu = -\mu_0 J_\mu$ .

[洛伦兹条件]  $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0$ .

$$\text{[电磁场张量]} F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{i}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{i}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{i}{c}E_3 \\ \frac{i}{c}E_1 & \frac{i}{c}E_2 & \frac{i}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{[麦克斯韦方程组的协变形式]} \begin{cases} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 J_\mu \\ \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \end{cases}$$

$$\text{[电磁场的变换关系 (分量形式)]} \begin{cases} E'_1 = E_1, & B'_1 = B_1 \\ E'_2 = \gamma(E_2 - vB_3), & B'_2 = \gamma(B_2 + \frac{v}{c^2}E_3) \\ E'_3 = \gamma(E_3 + vB_2), & B'_3 = \gamma(B_3 - \frac{v}{c^2}E_2) \end{cases}.$$

$$[\text{电磁场的变换关系 (矢量形式)}] \begin{cases} \vec{E}'_{//} = \vec{E}_{//}, & B'_{//} = \vec{B}_{//} \\ \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_{\perp}, & \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E})_{\perp} \end{cases} .$$

#### 4. 相对论力学

$$[\text{四维动量矢量}] p_{\mu} = m_0 U_{\mu} = (\vec{p}, p_4).$$

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, p_4 = \gamma m_0 i c = \frac{i}{c} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

$$[p_4 \text{ 的低速展开}] p_4 = \frac{i}{c} (m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots).$$

设物体中包含的能量为  $W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , 则  $p_4 = \frac{i}{c} W$ ,  $W$  包含物体动能.

$$\text{动能 } T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2. \text{ 物体的能量 } W = T + m_0 c^2.$$

$$[\text{能量-动量四维矢量 (四维动量)}] p_{\mu} = (\vec{p}, \frac{i}{c} W).$$

$$[\text{能量守恒}] p_{\mu} p_{\mu} = \vec{p}^2 - \frac{W^2}{c^2} = -m_0^2 c^2, W = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}.$$

$$[\text{动质量}] m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

$$[\text{质能关系}] W = m c^2.$$

$$[\text{四维力矢量}] K_{\mu} = (\vec{K}, \frac{i}{c} \frac{dW}{d\tau}) = (\vec{K}, \frac{i}{c} \vec{K} \cdot \vec{v}).$$

$$\text{力 (不使用固有时): } \vec{F} = \frac{1}{\gamma} \vec{K} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \vec{K}.$$

$$[\text{相对论力学方程}] \begin{cases} \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dW}{dt} \end{cases} .$$

$$[\text{洛伦兹力的相对论形式}] \vec{K} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

$$[\text{洛伦兹力密度}] f_{\mu} = (\vec{f}, f_4).$$

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}, f_4 = \frac{i}{c} \vec{J} \cdot \vec{E}.$$