电磁波的辐射

(第一次修订)

1. 规范变换

[**电磁场的势**] $\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$.

[**规范不唯一的证明**]

设 ψ 为任意时空函数, 作规范变换: $\begin{cases}\vec{A}\to\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\psi\\ \varphi\to\varphi'=\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial t}\end{cases}$

此时 $\begin{cases}\vec{B}'=\vec{\nabla}\times\vec{A}'=\vec{\nabla}\times\vec{A}+\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B}\\ \vec{E}'=-\vec{\nabla}\varphi'-\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}=-\vec{\nabla}\varphi+\frac{\partial\vec{\nabla}\psi}{\partial t}-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\frac{\partial\vec{\nabla}\psi}{\partial t}=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\vec{E}\end{cases}$.

[**规范变换与规范不变性**] 当势作规范变换时, 所有物理量与物理规律都应该保持不变. 这种不变性称为规范不变性.

[**规范条件**]

库伦规范: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$;

洛伦兹规范: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$.

2. 电磁场的势

[**真空中电磁场势的基本方程**] $\begin{cases}\vec{\nabla}^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t})=-\mu_0\vec{J}\\ \vec{\nabla}^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{cases}$.

采用库伦规范: $\begin{cases}\vec{\nabla}^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\mu_0\vec{J}\\ \vec{\nabla}^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{cases}$;

采用洛伦兹规范: $\begin{cases}\vec{\nabla}^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}\\ \vec{\nabla}^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{cases}$.

[**达朗贝尔方程**] 电荷产生标势波动, 电流产生矢势波动.

$$\begin{cases}\vec{\nabla}^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}\\ \vec{\nabla}^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0\end{cases}$$

[**推迟势 (达朗贝尔方程的解)**] $\begin{cases}\varphi(\vec{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\vec{x'},t-\frac{r}{c})}{r}dV'\\ \vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(\vec{x'},t-\frac{r}{c})}{t}dV'\end{cases}$.

[**推迟势的推导**]

先求只在原点存在点电荷的情形. 由 $\vec{\nabla}^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, 得 $\vec{\nabla}^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}Q(t)\delta(\vec{x})$.

因点电荷激发的势具有球对称性, 所以 $\vec{\nabla}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\varphi=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$

即: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}Q(t)\delta(\vec{x})$.

除原点外空间均无源, 有 $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$.

因 φ 随 r 增大而减弱, 可以设 $\varphi(r,t)=\frac{u(r,t)}{r}$, 即 $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$.

分离变量解 $u(r,t)=R(r)T(t)$, 得 $T\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}R\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=0$.

令 $\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}=\frac{1}{c^2}\frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=-\lambda$, 得 $\begin{cases}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}+\lambda R=0\\ \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+c^2\lambda T=0\end{cases}$

解得: $\begin{cases}R(r)=C_1e^{i\sqrt{\lambda}r}+D_1e^{-i\sqrt{\lambda}r}\\ T(t)=C_2e^{ic\sqrt{\lambda}t}+D_2e^{-ic\sqrt{\lambda}t}\end{cases}$

解得 $u(r,t)=R(r)T(t)=A_1e^{ic\sqrt{\lambda}(t-\frac{r}{c})}+A_2e^{-ic\sqrt{\lambda}(t-\frac{r}{c})}+B_1e^{ic\sqrt{\lambda}(t+\frac{r}{c})}+B_2e^{-ic\sqrt{\lambda}(t+\frac{r}{c})}$

设 $\begin{cases}f(t-\frac{r}{c})=A_1e^{ic\sqrt{\lambda}(t-\frac{r}{c})}+A_2e^{-ic\sqrt{\lambda}(t-\frac{r}{c})}\\ g(t+\frac{r}{c})=B_1e^{ic\sqrt{\lambda}(t+\frac{r}{c})}+B_2e^{-ic\sqrt{\lambda}(t+\frac{r}{c})}\end{cases}$, 得 $u(r,t)=f(t-\frac{r}{c})+g(t-\frac{r}{c})$.

在 $g(t+\frac{r}{c})$ 中, t 随 r 的增大而减小, 表示电磁波向内收敛. 在辐射问题中应有 $B_1=B_2=g(t-\frac{r}{c})=0$, 所以 $u(r,t)=f(t-\frac{r}{c})$, 即 $\varphi(r,t)=\frac{1}{r}f(t-\frac{r}{c})$.

与静电情形 $\varphi(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 比较可以猜解: $\varphi(r,t)=\frac{Q(t-\frac{r}{c})}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

为了验证此解成立, 作 $r=\eta\to 0$ 的球面, 应有:

$\int_0^\eta 4\pi r^2 dr\left(\vec{\nabla}^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi=\int_0^\eta 4\pi r^2 dr\left[-\frac{Q(t-\frac{r}{c})}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x})\right]$.

此时, $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi\sim\eta\to 0$, $t-\frac{r}{c}\to t$.

左式 $\to\frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0}\int_V dV\vec{\nabla}^2\frac{1}{r}=\frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S\vec{\nabla}\frac{1}{r}\cdot d\vec{S}=-\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}$

右式 $=\int_V-\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x})dV=-\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}$

所以 $\varphi(r,t)=\frac{Q(t-\frac{r}{c})}{4\pi\varepsilon_0 r}$ 是可行解, 当点电荷位于任意位置时: $\varphi(\vec{x},t)=\frac{Q(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{4\pi\varepsilon_0 r}$

对于一般的电荷分布 $\rho(\vec{x}',t)$, 有 $\varphi(\vec{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}dV'$;

矢势 $\vec{A}$ 具有相同形式, 故 $\vec{A}(\vec{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(\vec{x}',t-\frac{r}{c})}{r}dV'$.

[**推迟势的意义**] 空间某点 $\vec{x}$ 在时刻 t 的场值不依赖于同一时刻的电荷电流分布, 而是决定于较早时刻 $t-\frac{r}{c}$ 的电荷电流分布. 反映了电磁作用具有一定的传播速度.

3. 电偶极辐射

[**计算辐射场的一般公式**]

已知 $\vec{J}(\vec{x}', t-\frac{r}{c})$ 时, 有 $\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}', t-\frac{r}{c})}{r} dV'$

设 $\vec{J}(\vec{x}', t) = \vec{J}(\vec{x}')e^{-i\omega t}$, 即 $\vec{J}(\vec{x}', t) = \vec{J}(\vec{x}')e^{i(\frac{\omega}{c}r-\omega t)} = \vec{J}(\vec{x}')e^{i(kr-\omega t)}$

则 $\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{i(kr-\omega t)}}{r} dV' = \frac{\mu_0 e^{-i\omega t}}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{ikr}}{r} dV'$

设 $\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x})e^{-i\omega t}$, 则 $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{ikr}}{r} dV'$

设电荷密度为 $\rho(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x})e^{-i\omega t}$

由电流连续性 $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ 得 $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = i\omega\rho$

由 $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ 可得磁场 $\vec{B}$.

由 $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{c^2}\vec{E}$ 可得电场 $\vec{E} = \frac{ic}{k}\vec{\nabla}\times\vec{B}$.

[**推迟作用因子**] e^{ikr}, 表示电磁波传至场点时有 kr 相位滞后.

[**矢势的三个线度**]

(1). 电荷分布区域线度: l;

(2). 波长线度: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$;

(3). 电荷到场点的距离线度: r.

[**小区域条件**] $l << r$, $l << \lambda$.

[**近区 ($r << \lambda$) 场的特点**] 近区内 $kr << 1$, 推迟因子 $e^{kr} \sim 1$, 场保持恒定场的主要特点. 即电场具有静电场的纵向形式, 磁场也与恒定磁场相似.

[**矢势对远区 ($r >> \lambda$) 的展开**]

选原点在电荷分布区域内, 则 $|\vec{x}'|$ 的数量级为 l. 用 R 表示原点到场点 $\vec{x}$ 的距离 ($R = |\vec{x}|$), r 为由源点 $\vec{x}'$ 到场点 $\vec{x}$ 的距离, 有:

$$r \approx R - \vec{e}_R\cdot\vec{x}'$$

由 $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{ikr}}{r} dV'$ 得 $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{ik(R-\vec{e}_R\cdot\vec{x}')}}{R-\vec{e}_R\cdot\vec{x}'} dV'$

计算远场时, 只保留 $\frac{1}{R}$ 最低级项, 对 $\frac{1}{\lambda}$ 保留各级项.

由 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 得 $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(R-\vec{e}_R\cdot\vec{x}')}}{R} dV' = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int_V \vec{J}(\vec{x}')e^{-ik\vec{e}_R\cdot\vec{x}'} dV'$.

对相因子展开 $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int_V \vec{J}(\vec{x}')(1 - ik\vec{e}_R\cdot\vec{x}' + ...) dV'$.

[**电偶极辐射**]

考虑矢势展开的第一项 $\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\int_V \vec{J}(\vec{x}')dV'$

设单位体积内有 n_i 个带电 q_i 且速度为 v_i 的粒子, 则单位体积内粒子对电流密度的贡献为: $n_i q_i v_i$, 有 $\vec{J}=\sum\limits_i n_i q_i \vec{v}_i$.

则粒子对电流的总贡献为: $\int_V \vec{J}(\vec{x}')dV'=\sum q\vec{v}$

因 $\sum q\vec{v}=\frac{d}{dt}\sum q\vec{x}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\dot{\vec{p}}$, 所以 $\int_V \vec{J}(\vec{x}')dV'=\dot{\vec{p}}$.

对电偶极系统, $\vec{p}=Q\Delta\vec{l}$, $\dot{\vec{p}}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{dQ}{dt}\Delta\vec{l}=I\Delta\vec{l}=\int_V \vec{J}(\vec{x}')dV'$

则电偶极辐射 $\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\dot{\vec{p}}$.

因展开式只保留 $\frac{1}{R}$ 的最低级项, $\vec{\nabla}$ 不须作用在 $\frac{1}{R}$ 上, 有 $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{\mu_0 ik\vec{e}_R}{4\pi R}e^{ikR}\times\dot{\vec{p}}$.

由 $\ddot{\vec{p}}=-i\omega\dot{\vec{p}}$, 有 $\dot{\vec{p}}=\frac{i}{\omega}\ddot{\vec{p}}$, 即 $\vec{B}=\frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}\left(\ddot{\vec{p}}\times\vec{e}_R\right)$.

由 $\vec{E}=\frac{ic^2}{\omega}\vec{\nabla}\times\vec{B}$ 得 $\vec{E}=\frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\left(\ddot{\vec{p}}\times\vec{e}_R\right)\times\vec{e}_R$.

在球坐标系中, 选 $\vec{p}$ 的方向为极轴方向, 则:

$$\begin{cases}\vec{B}=\frac{\ddot{p}e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}\sin\theta\vec{e}_\varphi\\ \vec{E}=\frac{\ddot{p}e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\sin\theta\vec{e}_\theta\end{cases}$$

[**电偶极辐射的角分布**] $\vec{B}$ 总是横向的 (在纬线上), $\vec{E}$ 在经面上闭合. 由 $\nabla\cdot\vec{E}=0$ 可知 $\vec{E}$ 必须完全闭合, 即不可能完全横向. 电偶极辐射只在略去 $\frac{1}{R}$ 高次项后才近似为空间中的 TEM 波.

[**电偶极辐射的能流**] $\bar{\vec{S}}=\frac{|\ddot{\vec{p}}|^2\sin^2\theta}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2}\vec{e}_R$.

(1). 在 $\theta=90°$ 方向上辐射最强;

(2). 在 $\theta=0°$ 和 $\theta=180°$(沿电偶极矩轴线) 方向没有辐射.

[**电偶极辐射功率**] $P=\oint|\bar{\vec{S}}|R^2d\Omega=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{3c^3}$.

4. 电磁场的动量与动量守恒

[**电磁场动量守恒**] $\vec{f}=[\varepsilon_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E}+\varepsilon_0(\vec{\nabla}\times\vec{E})\times\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\vec{B}+\frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B}]-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})$.

[**电磁场动量守恒推导**]

由 $\vec{f}=\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}$ 和 $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ 得 $\vec{f}=\varepsilon_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}$

由 $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ 得 $\vec{f}=\varepsilon_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}$

由 $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ 得 $\vec{f}=\varepsilon_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\vec{B}+\frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}$

由 $\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})=\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}+\vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ 得 $\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})-\varepsilon_0\vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

由 $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ 得 $\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})-\varepsilon_0(\vec{\nabla}\times\vec{E})\times\vec{E}$

综上所述, $\vec{f}=[\varepsilon_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{E}+\varepsilon_0(\vec{\nabla}\times\vec{E})\times\vec{E}+\frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\vec{B}+\frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B}]-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})$.

[**电磁场的动量密度**] $\vec{g}=\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\vec{S}$.

5. 天线的辐射

[**短天线的辐射功率**] $P=\frac{\pi I_0^2}{12}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$.

设天线长为 l, 中心馈电点电流最大且为 I_0, 在两端点电流为 0.

短天线满足 $l<<\lambda$, 天线上的电流分布近似线性:$I(z)=\left(1-\frac{2}{l}|z|\right)I_0,\quad(|z|\leq\frac{1}{2}l)$.

由 $\dot{\vec{p}}=\int_V\vec{J}dV'$ 得 $\dot{\vec{p}}=\int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l}I(z)dz=\frac{1}{2}I_0\vec{l}$

短天线的辐射功率 $P=\frac{|\ddot{\vec{p}}|^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^3}=\frac{\pi I_0^2}{12}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$.

[**短天线辐射电阻**] $R_r=\frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2,\quad(l<<\lambda)$.

[**长线天线的矢势**]

由 $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ 和 $\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, 且长线天线电流只沿 z 方向, $\vec{A}$ 也只沿 z 方向.

由 $\begin{cases}\frac{\partial A_z}{\partial z}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0\\ E_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial t}\end{cases}$ 得 $\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t}=\frac{\partial^2A_z}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2A_z}{\partial t^2}$

在天线表面切向方向上 $E_z=0$, 所以 $\frac{\partial^2A_z}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2A_z}{\partial t^2}=0$

$\vec{A}$ 满足推迟势 $\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(\vec{x}')e^{ikr}}{r}dV'$.

[**半波天线的矢势**] $\vec{A}(\vec{x})=\frac{\mu_0I_0e^{ikR}}{2\pi kR}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\vec{e}_z$.

[**半波天线的场**] $\begin{cases}\vec{B}(\vec{x})=-i\frac{\mu_0I_0e^{ikR}}{2\pi R}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\vec{e}_\varphi\\ \vec{E}(\vec{x})=c\vec{B}\times\vec{e}_R=-i\frac{\mu_0cI_0e^{ikR}}{2\pi R}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\vec{e}_\theta\end{cases}$

[**半波天线的辐射能流密度**] $\bar{\vec{S}}=\frac{\mu_0cI_0^2}{8\pi^2R^2}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}\vec{e}_R$.

辐射角由分布因子 $\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$ 确定, 与偶极辐射角分布相似, 但较集中于 $\theta=90^\circ$ 平面上.

[**半波天线总辐射功率**] $P=\frac{\mu_0cI_0^2}{8\pi}[\ln(2\pi\gamma)-Ci(2\pi)]$, 其中: 欧拉常数 $\ln(\gamma)\approx0.577$, 积分余弦函数 $Ci(x)=-\int_x^\infty\frac{\cos t}{t}dt$. $\qquad P\approx2.44\frac{\mu_0cI_0^2}{8\pi}$.

[**半波天线的辐射电阻**] $R_r\approx\frac{\mu_0c}{4\pi}\times2.44\approx73.2\Omega$