电磁现象的普遍规律

(第一次修订)

1. 真空中的静电场与恒磁场

[**库仑定律**] $\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2\vec{r}}{r^3}$, 真空电容率 $\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}F/m$.

[**高斯定理 (电场散度)**] $\oint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\int_V\rho dV}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{\varepsilon_0}$, 微分形式 $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

[**静电场旋度**] $\oint_L\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$, 微分形式:$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\vec{0}$.

[**电荷守恒定律**] $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$.

[**毕奥-萨伐尔定律**] $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(\vec{x'})\times\vec{r}}{r^3}dV'$, 对于闭合回路 L 有 $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_L\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$.

[**恒电流磁场环量 (旋度)**] $\oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\int_S\vec{J}\cdot d\vec{S}=\mu_0 I$, 微分形式 $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$.

[**磁场散度**] $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{0}$.

[**磁场散度和旋度公式证明**]

由毕奥-萨伐尔定律 $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_V\frac{\vec{J}(\vec{x'}\times\vec{r})}{r^3}dV'$ 和 $\vec{\nabla}\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3}$ 得:$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\vec{J}(\vec{x'})\times\vec{\nabla}(-\frac{1}{r})dV'$

因 $\vec{\nabla}$ 只作用于变量 x 上, 所以根据矢量外积的交换律有 $\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\vec{\nabla}\times[\vec{J}(\vec{x'})\frac{1}{r}]dV'$

即:$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\vec{J}(\vec{x'})\frac{1}{r}dV'$

引入磁矢势 $\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\vec{J}(\vec{x'})\frac{1}{r}dV'$ 有:$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$

综上所述, 磁场散度 $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$

$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\vec{\nabla}^2\vec{A}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot\int_V\vec{J}(\vec{x'})\frac{1}{r}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\vec{J}(\vec{x'})\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r}dV'$

由 $\vec{\nabla}\cdot[\vec{J}(\vec{x'})\frac{1}{r}]=\frac{1}{r}\vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{x'})+\vec{J}(\vec{x'})\cdot\nabla\frac{1}{r}=\vec{J}(\vec{x'})\cdot\nabla\frac{1}{r}$

得:$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\vec{\nabla}\cdot[\vec{J}(\vec{x'})\frac{1}{r}]dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S\vec{J}(\vec{x'})\frac{1}{r}\cdot d\vec{S}$

因 V 内包括所有电流, 所以没有电流通过曲面 S, 即:$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$

$\vec{\nabla}^2\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\vec{J}(\vec{x'})\vec{\nabla}^2\frac{1}{r}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\vec{J}(\vec{x'})\vec{\nabla}\cdot(-\frac{\vec{r}}{r^3})dV'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\vec{J}(\vec{x'})\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}dV'$

对于 $|\vec{r}|\neq0$(即 $\vec{x}\neq\vec{x'}$) 有 $\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}=-\frac{3\vec{r}}{r^5}\cdot\vec{r}+3\frac{1}{r^3}=0$

因此 $\vec{\nabla}^2\vec{A}$ 除在源点 $\vec{x}=\vec{x}'$ 外均为零, 可以直接取 $\vec{J}(\vec{x'})=\vec{J}(\vec{x})$

且 $\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}'$ 有 $\vec{\nabla}=-\vec{\nabla}'$

即有:$\vec{\nabla}^2\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{J}(\vec{x})\int_V\vec{\nabla}'\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{J}(\vec{x})\oint_S\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot d\vec{S}$

因源-场矢径 $\vec{r}$ 与场区面元 $d\vec{S}$ 方向相反

所以 $\vec{\nabla}^2\vec{A}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{J}(\vec{x})\oint_S\frac{dS}{r^2}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\vec{J}(\vec{x})\oint_S d\Omega=-\mu_0\vec{J}(\vec{x})$

综上所述, 磁场旋度 $\vec{\nabla}\times\vec{B}=-(-\mu_0\vec{J})=\mu_0\vec{J}$

2. 真空中的电磁场

[**电磁感应定律**] $\mathscr{E} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$.

[**电场旋度 (闭合回路电势)**] $\mathscr{E} = \oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}$, 微分形式 $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

[**位移电流**] $\vec{J}_D = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

[**电流的连续性方程**] $\vec{\nabla}\cdot(\vec{J}+\vec{J}_D) = 0$.

[**磁场旋度**] $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

[**电荷系统力密度**] $\vec{f} = \rho\vec{E} + \rho\vec{v}\times\vec{B}$.

[**洛伦兹力**] $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$.

[**真空中的麦克斯韦方程组**]

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{0} \end{cases}$$

3. 介质中的电磁场

[**电偶极矩**] $\vec{p} = q\vec{l}$.

[**极化强度**] $\vec{P} = \frac{\sum\limits_i \vec{p}_i}{\Delta V}$.

[**束缚电荷密度**] $\int_V \rho_p dV = -\oint_S \vec{P}\cdot d\vec{S}$, 微分形式 $\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$.

[**束缚电荷面密度 (两介质界面)**] $\sigma_p = -\vec{e}_n\cdot(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)$.

[**电位移矢量**] $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$.

[**各项同性线性介质极化强度**] $\vec{P} = \chi_e\varepsilon_0\vec{E}$.

[**相对电容率**] $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$.

[**介质中的电场散度**] $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_f$.

[**磁矩**] $\vec{m} = i\vec{a}$.

[**磁化强度**] $\vec{M} = \frac{\sum\limits_i \vec{m}_i}{\Delta V}$.

[**磁化电流密度**] $\int_S \vec{J}_M\cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{M}\cdot d\vec{l}$, 微分形式 $\vec{J}_M = \vec{\nabla}\times\vec{M}$.

[**极化电流**] $\vec{J}_p = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} = \frac{\sum\limits_i e_i\vec{v}_i}{\Delta V} = \frac{\partial\sum\limits_i e_i\vec{x}_i}{\Delta V\partial t}$.

[**诱导电流**] 磁化电流和极化电流统称为诱导电流 $\vec{J}_M + \vec{J}_p$, 诱导电流不能被直接测量.

[**磁场强度**] $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$.

[磁场旋度] $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\mu_0\vec{J}_f+\mu_0\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$.

[各向同性线性介质磁化率] $\vec{M}=\chi_M\vec{H}$.

[相对磁导率] $\mu_r=1+\chi_M$.

[介质中的麦克斯韦方程组]

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\end{cases}\qquad\text{对于各向同性线性介质有}\begin{cases}\vec{D}=\varepsilon\vec{E}\\ \vec{B}=\mu\vec{H}\\ \vec{J}=\sigma\vec{E}\end{cases}$$

4. 介质面上的电磁场

[介质中麦克斯韦方程组的积分形式]

$$\begin{cases}\oint_L\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d}{dt}\int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}\\ \oint_L\vec{H}\cdot d\vec{l}=I_f+\frac{d}{dt}\int_S\vec{D}\cdot d\vec{S}\\ \oint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=Q_f\\ \oint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0\end{cases}$$

[界面处的法向电场跃变] $\vec{e_n}\cdot(\vec{D}_{2n}-\vec{D}_{1n})=\sigma_f$, ($\oint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_S\sigma_f dS$).

[界面处的法向磁场跃变] $\vec{e_n}\cdot(\vec{B}_{2n}-\vec{B}_{1n})=0$, ($\oint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$).

[界面处的切向电场跃变] $\vec{e_n}\times(\vec{E}_{2n}-\vec{E}_{1n})=\vec{0}$, ($\oint_L\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d}{dt}\int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}$, 其中 $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ 有限).

[界面处的切向磁场跃变] $\vec{e_n}\times(\vec{H}_{2n}-\vec{H}_{1n})=\vec{\alpha}_f$, ($\oint_L\vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_L\vec{\alpha}_f\cdot d\vec{l}+\frac{d}{dt}\int_S\vec{D}\cdot d\vec{S}$, 其中 $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 有限).

[界面上的电磁场变化]

$$\begin{cases}\vec{e}_n\cdot(\vec{D}_{2n}-\vec{D}_{1n})=\sigma_f\\ \vec{e}_n\cdot(\vec{B}_{2n}-\vec{B}_{1n})=0\\ \vec{e}_n\times(\vec{E}_{2n}-\vec{E}_{1n})=\vec{0}\\ \vec{e}_n\times(\vec{H}_{2n}-\vec{H}_{1n})=\vec{\alpha}_f\end{cases}$$

5. 电磁场的能量

[**电磁场能量守恒定律**] $-\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{\sigma}=\frac{d}{dt}\int_V wdV+\int_V \vec{f}\cdot\vec{v}dV.$

流入能量: $-\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{\sigma}$;

电磁能增量: $\frac{d}{dt}\int_V wdV$;

场对电荷做功: $\int_V \vec{f}\cdot\vec{v}dV.$

[**电磁场能量密度**] $\frac{\partial w}{\partial t}=\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$

[**电磁场能流密度 (坡印廷矢量)**] $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$, 真空中有 $\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}.$

[**电磁场能量密度和能流密度公式证明**]

由电磁场能量守恒定律:$-\oint_S \vec{S}\cdot d\vec{\sigma}=\frac{d}{dt}\int_V wdV+\int_V \vec{f}\cdot\vec{v}dV$

得微分形式:$-\vec{\nabla}\cdot\vec{S}=\frac{\partial w}{\partial t}+\vec{f}\cdot\vec{v}$, 即 $-\vec{f}\cdot\vec{v}=\vec{\nabla}\cdot\vec{S}+\frac{\partial w}{\partial t}$

由电荷在磁场中受力的洛伦兹力密度表达式 $\vec{f}=\rho\vec{E}+\rho\vec{v}\times\vec{B}$

得:$-\vec{f}\cdot\vec{v}=-\rho\vec{v}\cdot\vec{E}=-\vec{J}\cdot\vec{E}$

由磁场旋度的麦克斯韦方程 $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

得:$\vec{J}=\vec{\nabla}\times\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

$-\vec{f}\cdot\vec{v}=-\vec{J}\cdot\vec{E}=-\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H})+\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

因为 $\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H})=(\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot\vec{H}-(\vec{\nabla}\times\vec{H})\cdot\vec{E}$

所以 $-\vec{f}\cdot\vec{v}=-\vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E})+\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H})+\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

由电场旋度的麦克斯韦方程 $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

得 $-\vec{f}\cdot\vec{v}=\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H})+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

根据电磁场能量守恒定律的微分形式

得:$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H})+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{\nabla}\times\vec{S}+\frac{\partial w}{\partial t}$

两边对比得:

电磁场能流密度 (坡印廷矢量) 的可能形式: $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$

电磁场能量密度的可能形式: $\frac{\partial w}{\partial t}=\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

[**真空中的电磁场能量**]

能量密度: $w=\frac{1}{2}(\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2)$ **能流密度**: $\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$

[**线性介质中的电磁场能量**]

能量密度: $w=\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B})$