# 静电场

(第一次修订)

## 1. 静电场的方程

[**正交曲线坐标系上的 $\vec{\nabla}$ 算子**]

(1). 梯度 $\vec{\nabla} = \sum\limits_{i}^{n} \frac{1}{h_i}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\vec{e}_i$;

(2). 散度 $\vec{\nabla}\cdot\vec{f} = \frac{1}{\prod\limits_{i}^{n} h_i}\left[\sum\limits_{j}^{n}\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{\prod\limits_{k} h_k}{h_j}f_j\right)\right]$;

(3). 旋度 $\vec{\nabla}\times\vec{f} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_2\vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1f_1 & h_2f_2 & h_3f_3 \end{vmatrix}$.

[**电势**] $\varphi(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho(\vec{x}')dV'}{4\pi\varepsilon_0 r}$, 有 $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$.

[**静电势的微分方程**] 对于各项同性线性介质 ($\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$), 有:$\vec{\nabla}^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$.

边值:$\begin{cases} \vec{e}_n\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1) = \vec{0} \\ \vec{e}_n\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1) = \sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_1\cdot\Delta\vec{l}_1 = \vec{E}_2\cdot\Delta\vec{l}_2 \\ \varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} - \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = -\sigma \end{cases}$

[**导体静电条件**]

(1). 导体内部不带净电荷, 电荷只分布在表面上;

(2). 导体内部电场为零;

(3). 导体表面上电场必沿法线方向, 导体表面必为等势面, 整个导体电势相等, 即 $\begin{cases} \varphi = C \\ \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\sigma \end{cases}$.

[**线性介质中静电场的总能量**] $W = \frac{1}{2}\int_\infty \vec{E}\cdot\vec{D}dV$.

## 2. 静电场边值问题

[**唯一性定理**] 设区域 $V$ 内给定自由电荷分布 $\rho(\vec{x})$, 在 $V$ 的边界上给定电势 $\varphi|_s$ 或电势法线方向偏导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\big|_s$, 则 $V$ 内的电场唯一确定.

[**有导体存在的唯一性定理条件**]

(1). 给定每个导体上的电势;

(2). 给定每个导体上的总电荷.

[**勒让德方程**] $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$.

解为勒让德多项式: $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$.

[**轴对称情形下的拉普拉斯方程**] $\vec{\nabla}^2\varphi = 0$.

解为: $\varphi = \sum\limits_n (a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}}) P_n(\cos\theta)$.

[**常见静电场问题边界**]

(1). 绝缘介质边界: $\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \end{cases}$;

(2). 已知电势 $\varphi_0$ 的导体与绝缘体边界: $\varphi = \varphi_0$;

(3). 已知导体电荷量 $Q$ 的导体与绝缘体边界: $\begin{cases} \varphi = C \\ -\oint_s \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = Q \end{cases}$, 此时导体面上的自由电荷面密度可知为 $\sigma = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n}$.

[**静电场边值问题分类**]

(1). 第一类边值问题: 给定边界 $S$ 上的电势 $\varphi_s$;

(2). 第二类边值问题: 给定边界 $S$ 上的 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}\big|_s$.

[**单位冲激函数**] $\delta(\vec{x}) : \begin{cases} \delta(\vec{x}) = 0 & , \vec{x} \neq \vec{0} \\ \int_V \delta(\vec{x}) dV = 1 & , \{V | \vec{x} = 0 \in V\} \end{cases}$.

[**单位冲激函数的性质**]

(1). 若 $f(\vec{x})$ 在原点附近连续, $V$ 包含原点, 则 $\int_V f(\vec{x})\delta(\vec{x}) dV = f(\vec{0})$;

(2). 若 $V$ 包含 $\vec{x}'$, $f(\vec{x})$ 在 $\vec{x} = \vec{x}'$ 附近连续, 则 $\int_V f(\vec{x})\delta(\vec{x} - \vec{x}') dV = f(\vec{x}')$.

[**单位点电荷密度函数**] $\rho(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}') : \begin{cases} \rho(\vec{x}) = \delta(\vec{x} - \vec{x}') = 0 & , \vec{x} = \vec{x}' \\ \int_V \rho(\vec{x}) dV = \int_V \delta(\vec{x} - \vec{x}') dV = 1 & , \vec{x}' \in V \end{cases}$.

[**格林函数**] $\vec{\nabla}^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{\delta(\vec{x} - \vec{x}')}{\varepsilon_0}$.

(1). 泊松方程 $\vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}) = -\frac{\delta(\vec{x} - \vec{x}')}{\varepsilon_0}$ 在区域 $V$ 的边界上有 $\psi|_s = 0$, 其解为泊松方程在 $V$ 的第一类边值问题的格林函数;

(2). 泊松方程 $\vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}) = -\frac{\delta(\vec{x} - \vec{x}')}{\varepsilon_0}$ 在区域 $V$ 的边界上有 $\frac{\partial \psi}{\partial n}\big|_s = -\frac{1}{\varepsilon_0 S}$, 其解为泊松方程在 $V$ 的第二类边值问题的格林函数.

[**常见空间的格林函数**]

(1). 无界空间的格林函数: $G(\vec{x},\vec{x}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$;

(2). 上半空间的格林函数: $G(\vec{x},\vec{x}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right]$;

(3). 球外空间的格林函数: $G(\vec{x},\vec{x}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\theta}}-\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{ar}{R_0}\right)^2+R_0^2-2ar\cos\theta}}\right]$.

[**格林公式**] $\int_V(\psi\vec{\nabla}^2\varphi-\varphi\vec{\nabla}^2\psi)dV=\oint_s(\psi\vec{\nabla}\varphi-\varphi\vec{\nabla}\psi)\cdot d\vec{S}$.

[**格林函数法**]

已知: $\vec{\nabla}^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, 取 $\psi=G(\vec{x},\vec{x}')$.

交换 $\vec{x}$ 和 $\vec{x}'$, 即得 $G(\vec{x}',\vec{x})$,$\varphi(\vec{x}')$.

由 $\int_V\left[\varphi(\vec{x}')\vec{\nabla}'^2G(\vec{x}',\vec{x})-G(\vec{x}',\vec{x})\vec{\nabla}'^2\varphi(\vec{x}')\right]dV'$

$=\oint_s\left[\varphi(\vec{x}')\vec{\nabla}'G(\vec{x}',\vec{x})-G(\vec{x}',\vec{x})\vec{\nabla}'\varphi(\vec{x}')\right]\cdot d\vec{S}'$ 和 $\vec{\nabla}'^2G(\vec{x}',\vec{x})=-\frac{\delta(\vec{x}'-\vec{x})}{\varepsilon_0}$

得:$\int_V\left[\varphi(\vec{x}')\vec{\nabla}'^2G(\vec{x}',\vec{x})-G(\vec{x}',\vec{x})\vec{\nabla}'^2\varphi(\vec{x}')\right]dV'=-\frac{\varphi(\vec{x})}{\varepsilon_0}+\int_V\frac{G(\vec{x}',\vec{x})\rho(\vec{x}')}{\varepsilon_0}dV'$

即:$\varphi(\vec{x})=\int_V G(\vec{x}',\vec{x})\rho(\vec{x}')dV'-\varepsilon_0\oint_s\left[\varphi(\vec{x}')\vec{\nabla}'G(\vec{x}',\vec{x})-G(\vec{x}',\vec{x})\vec{\nabla}'\varphi(\vec{x}')\right]\cdot d\vec{S}'$

对于第一类边值问题, 有 $G(\vec{x}',\vec{x})=0$, $\vec{x}'$ 在 $S$ 上

$\varphi(\vec{x})=\int_V G(\vec{x}',\vec{x})\rho(\vec{x}')dV'-\varepsilon_0\oint_s\varphi(\vec{x}')\vec{\nabla}'G(\vec{x}',\vec{x})\cdot d\vec{S}'$

对于第二类边值问题, 有 $-\oint_s\vec{\nabla}'G(\vec{x}',\vec{x})\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\Rightarrow\vec{\nabla}'G(\vec{x}',\vec{x})=-\frac{1}{\varepsilon_0 S}$

$\varphi(\vec{x})=\int_V G(\vec{x}',\vec{x})\rho(\vec{x}')dV'+\varepsilon_0\oint_s G(\vec{x}',\vec{x})\vec{\nabla}'\varphi(\vec{x}')\cdot d\vec{S}+<\varphi>|_s$

## 3. 静电场的多极展开

[**电偶极矩**] $\vec{p}=\int_V\rho(\vec{x}')\vec{x}'dV'$.

[**电四极矩**] $\overleftrightarrow{\mathscr{D}}=\int_V 3\vec{x}'\vec{x}'\rho(\vec{x}')dV'$.

[**电势多极展开**]

设 $f(\vec{x}-\vec{x}')=\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=\frac{1}{r}$

$f(\vec{x}-\vec{x}')=\frac{1}{r}-\vec{x}'\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r}+\frac{1}{2!}(\vec{x}'\cdot\vec{\nabla})^2\frac{1}{r}+...$

$\varphi(\vec{x})=\int_V\frac{\rho(\vec{x}')dV'}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\rho(\vec{x}')f(\vec{x}-\vec{x}')dV'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r}-\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r}+\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathscr{D}}:\vec{\nabla}\vec{\nabla}\frac{1}{r}+...\right]$

[**电势多极展开的成分**]

(1). 点电荷电势: $\varphi^{(0)}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$;

(2). 电偶极子电势: $\varphi^{(1)}=-\frac{\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{r}}{4\pi\varepsilon_0}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$;

(3). 电四极子电势: $\varphi^{(2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathscr{D}}:\vec{\nabla}\vec{\nabla}\frac{1}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{6}\sum_{i,j}\mathscr{D}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{r}$.

[**电荷体系在外电场中能量的多极展开**]

$$W=\int_V\rho\varphi_e dV=\int_V\rho(\vec{x})\left[\varphi_e(0)+\sum_i x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_e(0)+\frac{1}{2!}\sum_{i,j}x_ix_j\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\varphi_e(0)+...\right]$$

$$=Q\varphi_e(0)+\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\varphi_e(0)+\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathscr{D}}:\vec{\nabla}\vec{\nabla}\varphi_e(0)+...$$

[**电荷体系能量多极展开的成分**]

(1). 点电荷能量: $W^{(0)}=Q\varphi_e(0)$;

(2). 电偶极子能量: $W^{(1)}=\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\varphi_e(0)=-\vec{p}\cdot\vec{E}_e(0)$;

(3). 电四极子能量: $W^{(2)}=-\frac{1}{6}\overleftrightarrow{\mathscr{D}}:\vec{\nabla}\vec{E}_e(0)$.

[**电偶极子在外电场中受力**] $\vec{F}=-\vec{\nabla}W^{(1)}=\vec{\nabla}(\vec{p}\cdot\vec{E}_e)=\vec{p}\cdot\vec{\nabla}\vec{E}_e$.

[**电偶极子在外电场中受力矩**] $\vec{L}=\vec{p}\times\vec{E}_e$.