# 度量空间与集合 (作业: 20230220)

1. 度量空间: 设 $X$ 是集合, 有映射 $d:(x,y)\to d(x,y).d$ 满足:
   (a) 正定性: $\forall x,y\in X, d(x,y)\geq 0$;
   (b) 对称性: $\forall x,y\in X$,$d(x,y)=d(y,x)$;
   (c) 三角不等式: $\forall x,y,z\in X, d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$;

   则称 $d$ 为一个度量 (距离), $(X,d)$ 为度量空间;

2. 常见度量:
   (a) $p-$ 度量: $d_p(x,y)=\left(\sum\limits_{x=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$;
   (b) $\infty-$ 度量: $d_\infty(x,y)=\max|x_i-y_i|$;

3. 球: 在度量空间 $(X,d)$ 中, 称
   (a) 开球: $B(x_0,r)=\{x\in X|d(x,x_0)<r\}$;
   (b) 闭球: $\overline{B(x_0,r)}=\{x\in X|d(x,x_0)\leq r\}$;
   (c) 球面: $S(x_0,r)=\{x\in X|d(x,x_0)=r\}$;

4. $\varepsilon-$ 邻域: 开球 $B(x_0,\varepsilon)$ 称为 $x_0$ 的一个 $\varepsilon-$ 邻域;
   (a) 开集: 度量空间 $(X,d), M\subset X$, 若对任意元素 $x_0\in M$, 存在 $\varepsilon>0$, 使得 $B(x_0,\varepsilon)\subset M$, 则称 $M$ 是 $X$ 中的开集;
   (b) 闭集: 度量空间 $(X,d), K\subset X$, 若 $K^c=X|K$ 是开集, 则称 $K$ 是 $X$ 中的闭集;
   (c) 内点: 度量空间 $(X,d)$, $M\subset X, x_0\in M$, 若存在 $\varepsilon>0$, 使得 $B(x_0,\varepsilon)\subset M$, 则称 $x_o$ 是 $M$ 的一个内点;
   (d) 内部: $M$ 中全体内点构成的集合称为 $M$ 的内部, 记为: $M^o$;

5. 集类: $\Xi$ 是 $X$ 中某些子集构成的集合, 称 $\Xi$ 为集类;

6. 拓扑空间: 满足开集条件的集类组成的空间 $(X,\Xi)$, 定义见另一笔记文件;

7. 聚点 (极限点): 度量空间 $(X,d), M\subset X, x_0\in X$, 若, $x_0$ 的任一 $\varepsilon-$ 邻域都至少函有一个不同于 $x_0$ 的点 $y_o\in M$, 则称 $x_0$ 是 $M$ 的聚点;

(a) 导集: $M$ 的聚点全体构成的集合称为 $M$ 的导集, 记为 $M'$;

(b) 闭包: $\bar{M} := M \cup M'$;

i. 度量空间 $(X, d), M \subset X$, 则 $\overline{M}$ 是闭集;

ii. 度量空间 $(X, d), M \subset X : M$ 是闭集 $\Leftrightarrow M = \bar{M}$;

(c) 边缘: $\partial M = \bar{M} - M^o$;

8. 有限集: 如果集合中元素个数有限, 则称其为有限集;

(a) 可列集: 若集合中元素的个数无限多, 但可与自然数集 $\mathbb{N}$ 中的元素一一对应, 则集合为可列集;

(b) 可数集: 有限集和可列集统称为可数集;

(c) $A_n(n \in \mathbb{N})$ 为可列集, 则 $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 为可列集;

i. 推论: 可列个可列集的并集为可列集. 如: 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可列集;

(d) 常见的不可列集: 无理数集, 实数集 $\mathbb{R}$;

9. 稠密子集: 度量空间 $(X, d), M \subset X$, 若 $\overline{M} = X$, 则称 $M$ 在 $X$ 中稠密, $M$ 是 $X$ 中的稠密子集;

10. 可分性: 若 $X$ 有一个可数的稠密子集 $M$, 则称 $X$ 是可分的, $(X, d)$ 是一个可分空间;

(a) 常见可分空间: $(\mathbb{R}^n, d_p)(1 \leq p \leq \infty)$, $(l^p, d_p)(1 \leq p \leq \infty)$, 其中 $l^p = \{\{x_i\}, i \in \mathbb{N}, \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$;

i. 函数空间可分: $(\mathbb{C}[a, b], d_{max})$
$d_{max}(f, g) = \max\limits_{a \leq t \leq b} |f(t) - g(t)|$
$C[a, b] = \{f : [a, b] \to R | \exists f'(t)\}$

(b) 常见不可分空间: $(l^\infty, d_\infty)$;
$l^\infty = \{(x_i) | i \in \mathbb{N}, \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty\}$

11. 作业: 20230220

(a) 设 $(X, d)$ 是任一度量空间, 证明由 $\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ 在 $X$ 上定义了另一个度量, 且在 $\tilde{d}$ 度量下, $X$ 是有界的;

证:

证明 $\forall x, y \in X, \tilde{d}(x,y)$ 是 $X$ 上的一个度量:

正定性:

$\because d$ 是 $X$ 上的一个度量;

$\therefore d(x,y) \geq 0$ 且 $1+d(x,y) \geq 1, \forall x, y \in X$;

$\because \tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$;

$\therefore \underline{\tilde{d}(x,y) \geq 0}$;

对称性:

$\because d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in X$;

$\therefore \underline{\tilde{d}(y,x) = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \tilde{d}(x,y)}$;

三角不等式:

若 $\tilde{d}(x,y)$ 满足 $\tilde{d}(x,z) \leq \tilde{d}(x,y)+\tilde{d}(y,z), \forall x, y, z \in X$;

则必然有 $\tilde{d}(x,z) - \tilde{d}(y,z) \leq \tilde{d}(x,y)$;

$\because d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \Leftrightarrow d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y)$;

$\therefore \tilde{d}(x,z) - \tilde{d}(y,z) = \frac{d(x,z)-d(y,z)}{1+d(x,z)+d(y,z)+d(x,z)d(y,z)} \leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,z)+d(y,z)+d(x,z)d(y,z)}$;

$\because d(x,z) + d(y,z) \geq d(x,y)$;

$\therefore \tilde{d}(x,z) - \tilde{d}(y,z) \leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(x,z)d(y,z)}$;

$\because d(x,z) \geq 0, d(y,z) \geq 0 \Rightarrow d(x,z)d(y,z) \geq 0$;

$\therefore \tilde{d}(x,z) - (y\tilde{,}z) \leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \tilde{d}(x,y)$,

即 $\underline{\tilde{d}(x,z) \leq \tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z)}$;

综上, $\underline{\tilde{d}(x,y)\text{是 X 上的一个度量}}$;

证明在度量 $\tilde{d}(x,y)$ 下 $X$ 是有界的:

由 $\tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ 且 $d(x,y) \geq 0$;

定义 $\tilde{d}$ 关于 $d$ 的函数 $\tilde{d}(d) = \frac{d}{1+d}, d \geq 0$;

$\because \tilde{d}(d) = \frac{d}{1+d}, d \geq 0$;

$\therefore \tilde{d}'(d) = \frac{1}{(1+d)^2} \geq 0$;

$\because 0 < \tilde{d}'(d) \leq 1$;

$\therefore \tilde{d}_{max}(d) = \lim\limits_{d \to +\infty} \frac{d}{1+d} = 1$;

$\because \max\limits_{d \geq 0} \tilde{d}(d) = \sup\limits_{x \in X, y \in X} \tilde{d}(x, y) = 1$(在下一章中可引入 $\tilde{d}(X) = 1 < +\infty$);

$\therefore$ <u>$X$在度量 $\tilde{d}$ 下有界</u>;

证毕.■