映射 (作业: 20230227) 与巴拿赫不动点定理 (作业: 20230309)

1. 连续: 设度量空间 (X,d_X) 和 (Y,d_Y), 映射 $T:X\to Y$, $x_0\in X$, 若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\forall x,d_X(x_0,x)<\delta$, 有 $d_Y(T(x),T(x_0))<\varepsilon$, 则称 T 在 x_0 处连续.

   可简记为: $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:T(B(x_0,\delta))<B(T(x_0),\varepsilon)$;

   (a) 映射连续: 映射若映射 T 在 X 中每一点连续, 则称 T 为连续映射;

   (b) 连续性等价描述 (与空间结构相融): U 是开集, $T:(X,d)\to(Y,d)$ 连续 $\Leftrightarrow\forall U\subset Y:T^{-1}U=\{x\in X|T(x)\subset U\}$ 是 X 中的开集;

      i. 若开集 $V,\forall V\subset X:TV=\{y\in Y|\exists x\in V,Tx=y\}$, 其像 TV 不一定是 Y 中的开集;

2. 极限 (在点处的收敛性): 在度量空间 (X,d), 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$, $\exists x\in X:\lim\limits_{i\to\infty}d(x_0,x)=0$, 则称 x 是序列 x_n 的极限. 记 $x_n\to x$ 或 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$;

   (a) 直径: 在度量空间 (X,d), $M\subset X$, 直径 $d(M)=\sup\limits_{x\in M,y\in M}d(x,y)$;

   (b) 有界集: 在度量空间 (X,d), $d(M)<\infty$, 则称 M 是有界集. M 是有界集 $\Leftrightarrow\forall x_0\in X,\exists r=r(x_0)>0:M\subset B(x_0,r)$;

   (c) 极限的唯一性: 在度量空间 (X,d) 中的收敛序列是有界集, 且极限唯一;

      i. 若 $x_n\to x,y_n\to y$, 则 $d(x_n,y_n)\to d(x,y)$;

3. 柯西列: 在度量空间 (X,d) 中, 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X,\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon)>0:n,m{>}N,d(x_n,y_n)<\varepsilon$, 则称 $\{x_n\}$ 为柯西列;

   (a) 在度量空间中, 收敛序列一定是柯西列 (柯西列未必收敛);

   (b) 完备空间: 在度量空间 (X,d) 中, 如果 X 中任何柯西列都是收敛列, 则称 X 完备;

      i. 常见完备空间: $(\mathbb{R}^n,d_p),(l^p,d_p)$;

4. 闭集: 在度量空间 (X,d) 中, $M\subset X,M$ 是闭集 $\Leftrightarrow\forall\{x_n\}\subset M:x_n\to x\in X,x\in M$;

5. 闭包: 在度量空间 (X,d) 中, $M \subset X, x \in X, x \in \bar{M} = M \cup M' \Leftrightarrow \exists\{x_n\} \subset M : x_n \to x$;

6. 子空间: 在度量空间 (X,d) 中, $M \subset X$. 则度量空间 (M,d) 被称为子空间;

   (a) 子空间完备性: 在完备的度量空间 (X,d) 中, $M \subset X$, 则: 当且仅当 M 是 X 中的闭集时, M 完备;

7. 连续函数: 度量空间 (X,d) 和 (Y,d) 有 $T:(X,d) \to (Y,d)$ 在 x_0 连续, 当且仅当若 $x_n \to x$ 在 (X,d), 则 $Tx_n \to Tx_0$ 在 (Y,d) 中;

8. 等距映射: 度量空间 (X,d) 和 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 有 $T:(X,d) \to (\tilde{X},\tilde{d})$, 若 $\forall x.y \in X, \exists\tilde{d}(Tx,Ty) = d(x,y)$, 则称 T 是等距映射;

   (a) 等距空间: 若有双射 (单射且满射)$T:(X,d) \to (\tilde{X},\tilde{d})$, 且 T 为等距映射, 则称度量空间 (X,d) 和 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 是等距空间;

9. 完备化空间: 度量空间 (X,d) 一定存在一个完备的度量空间 $(\hat{X},\hat{d})$, 且 $W \subset \hat{X}$ 满足 W 在 $\hat{X}$ 中稠密 $(\bar{W} = \hat{X})$ 且 W 与 X 是等距空间, 则称 $\hat{X}$ 是 X 的完备化空间;

10. 不动点: 集合 X, 映射 $T: X \to X$, 若 $\exists x \in X : T(x) = x$, 则称 x_0 是映射 T 的一个不动点;

    (a) 压缩映射: 在度量空间 (X,d) 中, 有映射 $T: X \to X$, 若 $\exists 0 < a < 1 : \forall x,y \in X, d(Tx,Ty) \le ad(x,y)$, 则称 T 为压缩映射;

    (b) 巴拿赫不动点定理: 在完备度量空间 (X,d) 中, 有压缩映射 $T : X \to X$, 则存在唯一不动点 x, 且 $\forall x_0 \in X, x_n = Tx_{n-1}, n \in N^*$, 则 $x_n|_{n\to\infty} = x$;

11. 李氏条件: $\forall(t,x),(t,y) \in R, \exists k > 0, s.t. : |f(t,x) - f(t,y)| \le k|x-y|$;

12. 常微分方程局部解的存在唯一性定理: 设 $R = \{(t,x)||t-t_0| \le a, |x-x_0| \le b\}$, f 在 R 上连续, $\forall(t,x) \in R, |f(t,x)| \le c$, f 对 x 满足李氏条件, 则常微分方程 $\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ 在区间 $[t_0-\beta, t_0+\beta]$ 上存在唯一的解 $x(t)$, $\beta < \min\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\}$;

13. 作业: 20230227

(a) 证明映射 $T: X \to Y$ 当且仅当任一闭集 $M \subset Y$ 的逆象是 X 中的闭集时才是连续的;

证:

证明充分性:

$\because M \subset Y$ 是闭集;

$\therefore M^c \subset Y$ 是开集;

$\because M \subset Y$ 在映射 $T: X \to Y$ 的逆象 $T^{-1}M$ 是 X 中的闭集;

$\therefore T^{-1}M^c = (T^{-1}M)^c \subset X$ 是开集;

$\because T^{-1}M \subset X$ 与 $M \subset Y$ 都是开集;

$\therefore$ 映射T连续;

证明必要性:

$\because$ 映射 $T: X \to Y$ 连续;

$\therefore \forall W \subset Y$ 是开集, 有 $T^{-1}W \subset X$ 是开集;

$\because W \subset Y$ 是开集;

$\therefore W^c \subset Y$ 是闭集, $T^{-1}W^c = (T^{-1}W)^c \subset X$ 也是闭集;

设 $M = W^c \subset Y$;

有 $T^{-1}M$是闭集;

综上, 原命题成立. 证毕. ■

14. 作业: 20230309

(a) 若度量空间 X 中的序列 (x_n) 是收敛的且有极限 x, 证明 (x_n) 的每一个子序列 (x_{n_k}) 都是收敛的, 并且有同一个极限 x;

证:

证明 (x_n) 的每一个子序列 (x_{n_k}) 都收敛:

$\because \{x_n\}$ 在 X 中收敛于 x, 设 X 中装配的度量是 d;

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), s.t. : d(x_n, x) < \varepsilon, (n \geq N)$(或记为 $x_n \in B(x, \varepsilon)$);

$\because \forall \{x'_n\} \subset \{x_n\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子序列, $d(x'_n, x) < \varepsilon, n \geq N$;

$\therefore \underline{\{x'_n\}\text{收敛}}$;

证明 (x'_n) 与 (x_n) 收敛于同一个极限 x:

$\because d(x'_n, x) < \varepsilon, n \geq N$;

$\therefore \lim\limits_{n \to +\infty} d(x'_n, x) = 0$, 即 $\{x'_n\}$ 的极限是 x;

$\because \{x_n\}$ 的极限是 x;

$\therefore \underline{\{x'_n\}\text{与}\{x_n\}\text{有同样的极限}x}$;

证毕. $\blacksquare$