内积空间

1. 内积: 设 (X,K) 线性空间, 内积运算 $<\cdot,\cdot>$: $X\times X\to K$ 应该满足:
   (a) 双线性: $\forall\alpha,\beta\in K, x_1,x_2\in X, <\alpha x_1+\beta x_2,y>=\alpha<x_1,y> +\beta<x_2,y>$;
      i. 共轭线性: $<x,\alpha y_1+\beta y_2>=\bar{\alpha}(x,y_1)+\bar{\beta}(x,y_2)$;
   (b) 共轭对称性: $\forall x,y\in X, <x,y>=\overline{<y,x>}$;
   (c) $<x,x>\geq 0$, 对于 $<x,x>=0$ 当且仅当 $x=\theta$;
2. 内积空间: 装配内积结构 $<\cdot,\cdot>$ 的空间 $(X,<\cdot,\cdot>)$ 被称为内积空间;
   (a) 内积诱导的范数: $||x||:=\sqrt{<x,x>}$;
   (b) 引理: $\forall x,y\in X, |<x,y>|\leq||x||\cdot||y||$;
   (c) 施瓦兹不等式: $|<x,y>|\leq||x||\cdot||y||$;
3. 希尔伯特空间: 若 $(X,<\cdot,\cdot>)$ 是完备的, 则称 $(X,<\cdot,\cdot>)$ 是希尔伯特空间;
4. 平行四边形法则: 对内积空间 $(X,<\cdot,\cdot>)$, $||x+y||^2+||x-y||^2=2(||x||^2+||y||^2)$;
5. 正交: 在内积空间 $(X,<\cdot,\cdot>)$ 中, $x,y\in X, A,B\subset X$:
   (a) 若 $<x,y>=0$ 则称 x 与 y 正交, 记为 $x\perp y$;
   (b) 若 $\forall z\in A$, 有 $<x,y>=0$, 则称 x 与 A 正交, 记为 $x\perp A$;
   (c) 若 $\forall z\in A, h\in B$, 都有 $<z,h>=0$, 则称 A 与 B 正交, 记为 $A\perp B$;
6. 内积的连续性: 对内积空间 $(X,<\cdot,\cdot>)$, 序列 $\{x_n\},\{y_n\}\subset X$, 若 $x_n\to x, y_n\to y$, 则 $<x_n,y_n>\to<x,y>$;
7. 内积空间中点到子空间的距离: 在度量空间 (X,d) 中, $x\in X, M\subset X$, $\delta=d(x,M)=\inf\limits_{y\in M}d(x,y)$;
8. 凸集: 设 X 是线性空间, $M\subset X$, 若 $\forall x,y\in M$, 有凸组合 $\forall\lambda\in[0,1], \exists z\in M, z=\lambda x+(1-\lambda)y$, 则称 M 是凸集;

(a) 点到集合距离可达的条件: 设 $(X,<\cdot,\cdot>)$ 是内积空间, $M\subset X, M\neq\phi$, 若 M 是完备的凸集, 则 $\forall x\in X,\exists! y\in M: d(x,M)=\inf\limits_{\tilde{y}\in M}||x-\tilde{y}||=||x-y||$;

(b) 垂足存在条件: 设 $(X,<\cdot,\cdot>)$ 是内积空间, $Y\subset X, Y$ 是完备子空间, $x\in X$, 则 $\exists! y\in Y, s.t.: ||x-y||=\inf\limits_{\tilde{y}\in Y}||x-\tilde{y}||=d(x,Y)$. 令 $z=x-y$, 则 $z\perp Y$;

9. 直和: 设 X 为线性空间, $Y,Z\subset X$, 若 $\forall x\in X$, 都 $\exists! x=y+z, y\in Y, z\in Z$, 则称 X 为子空间 Y,Z 的直和, 记作 $X=Y\oplus Z$;

(a) 正交补: 设 $(X,<\cdot,\cdot>)$ 是内积空间, $M\subset X$ 非空, 称 $M^\perp=\{x\in X|x\perp M\}$ 为 M 的正交补 (集合);

i. 无论 M 是不是子空间, $M^\perp$ 都是子空间;

ii. 无论 M 是不是闭集, $M^\perp$ 都是闭集 (进一步是闭子空间);

(b) 直和分解: 设 $(H,<\cdot,\cdot>)$ 是希尔伯特空间, $Y\subset H$ 是闭子空间, 则 $H=Y\oplus Y^\perp$;

i. $Y\cap Y^\perp=\{\theta\}$;

ii. 正交投影: 若 $x\in H, x=y+z, y\in Y, z\in Y^\perp$, 则称 y,z 分别为 x 在 $Y,Y^\perp$ 上的正交投影;

iii. 投影算子: $P:H\to Y, x\to Px=y$;

A. 幂等性: $P^2=P$;

(c) 设 H 是希尔伯特空间, $Y\subset H$ 是闭子空间, 则 $(Y^\perp)^\perp=Y$;

10. X 是内积空间, 若 $A\subset B\subset X$, 则 $B^\perp\subset A^\perp$;

(a) 对希尔伯特空间 H, $M\subset H$ 是非空子集, 当且仅当 $M^\perp=\{\theta\}$, $span\{M\}$ 在 H 中稠密;

11. 正交集: 对内积空间 $X, S=\{e_\alpha|\alpha\in A\}\subset X$, 若 $\forall\alpha,\beta\in A,\alpha\neq\beta$, 都有 $e_\alpha\perp e_\beta$, 则称 S 为正交集;

(a) 正交规范集: 若正交集 S 中的元素都满足 $||e_\alpha||=1$, 则称 S 为正交规范集;

12. Bessel 不等式: 对内积空间 $X, S=\{e_\alpha|\alpha\in A\}\subset X$ 是正交规范集, 则 $\forall x\in X$, 都有 $\sum\limits_{\alpha\in A}|<x,e_\alpha>|^2\leq||x||^2$;

(a) 设 H 是希尔伯特空间, $\{e_\alpha|\alpha\in A\}\subset H$ 是正交规范子集, $x\in H$, 则 $\sum\limits_{\alpha\in A}<x,e_\alpha>e_\alpha\in H$, 且 $||x||^2=\sum\limits_{\alpha\in A}|<x,e_\alpha>|^2+||x-\sum\limits_{\alpha\in A}<x,e_\alpha>e_\alpha||^2$;

13. 设 X 是内积空间, $\{e_\alpha,\alpha\in A\}=S\subset X$ 是正交规范集:
    (a) 完备性: 若 $S^\perp=\{\theta\}$, 则称 S 完备;
    (b) Fourier 系数: 若 $\forall x\in X$, 都有 $x=\sum\limits_{\alpha\in A}<x,e_\alpha>e_\alpha$, 则称 S 为一个基 (或封闭), 称 $\{<x,e_\alpha>\}_{\alpha\in A}$ 为 x 关于基 S 的 Fourier 系数;

14. 设 H 是希尔伯特空间, $S=\{e_\alpha,\alpha\in A\}\subset H$ 是正交规范集合, 则下面 3 点等价:
    (a) S 是基 (或封闭);
    (b) S 是完备的;
    (c) Bessel 不等式退化为 Parseval 等式: $\forall x\in A, ||x||^2=\sum\limits_{\alpha\in A}|<x,e_\alpha>|^2$;

15. 正交规范基存在: 设 H 是希尔伯特空间, 若 H 可分, 则 H 存在一个正交规范基 S, 且 S 可数;

16. Schmidt 正交化过程:
    (a) $y_1=x_1, e_1=\frac{y_1}{||y_1||}$;
    (b) $y_2=x_2-<x_2,e_1>e_1, e_2=\frac{y_2}{||y_2||}$;
    (c) $y_n=x_n-\sum\limits_{i=1}^{n-1}<x_n,e_i>e_i, e_n=\frac{y_n}{||y_n||}$;

17. 黎斯定理: 设 H 是希尔伯特空间, H 上任何有界线性泛函 $f:H\to K$, 都可以表示为内积形式, 即 $\exists! z=z_f\in H, s.t.:\forall x\in H, f(x)=<x,z>$, 且 $||f||=||z||$;

18. 内积空间的元素相等: 设 X 是内积空间, 元素 $v_1,v_2\in X$, 若对 $\forall w\in X$, 有 $<v_1,\omega>=<v_2,\omega>$, 则 $v_1=v_2$. 特别的, 若对 $\forall w\in X$, 有 $<v_1,w>=0$, 则 $w=0$;

19. Hahn-Banach 定理: 设 X 是赋范空间, 子空间 $Z\subset X$, 映射 $f:Z\to K$ 是有界线性泛函, 则 f 的延拓 $\exists\tilde{f}:X\to K$ 也是有界线性泛函, 并满足:

(a) 延拓: $\tilde{f}(x) = f(x), \forall x \in Z$;

(b) 保范: $||\tilde{f}|| = ||f||$;

(c) 推论: 设 X 是赋范空间, $x_0 \in X, x_0 \neq \theta$, 则 $\exists \tilde{f} : X \to K$ 有界线性泛函, 使得 $\tilde{f}(x_0) = ||x_0|| \neq 0$, 且 $||\tilde{f}|| = 1$;

(d) 注释: 赋范空间 X 上的有界线性泛函足够多. 即若 $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 则 $\exists \tilde{f} : X \to K$ 有界线性泛函, 使得 $\tilde{f}(x_1) \neq \tilde{f}(x_2)$;

20. 一致有界定理 (共鸣定理): 设 X 是巴拿赫空间, Y 是一般赋范空间, 序列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} : X \to Y$ 中的算子都有界线性. 若 $\forall x \in X, \exists M_x > 0$, 使得 $||T_n x|| \leq M_x, \forall n \in \mathbb{Z}^+$, 则 $\exists M > 0$ 使得 $||T_n|| \leq M, \forall n \in \mathbb{Z}^+$;

21. 开映射: 设 X, Y 是度量空间, 映射 $T : X \to Y$. 若 X 中任意开集 U, 它的象 $TU = \{Tx, x \in U\}$ 是 Y 中的开集, 则称 T 是开映射;

    (a) 注意: 连续映射 ($Im \to Ker$ 均是开集)$\neq$ 开映射 ($Ker \to Im$ 均是开集);

22. 开映射定理: 设 X, Y 是巴拿赫空间, 映射 $T : X \to Y$ 是满射且为有界线性算子, 则 T 是开映射;

    (a) 进一步, 若 T 是双射且为有界线性算子, 则逆映射 $T^{-1} : Y \to X$ 是连续线性算子;

23. 等价范数: 设 X 是线性空间, 范数 $||\cdot||_1$ 和 $||\cdot||_2$ 都是 X 上的范数, 且 $(X, ||\cdot||_1)$ 和 $(X, ||\cdot||_2)$ 都是完备的. 若存在 $b > 0$, 使得 $||x||_2 \leq b||x||_1, \forall x \in X$, 则存在 $a > 0$, 使得 $||x||_1 \leq a||x||_2, \forall x \in X$. 从而, $||x||_1$ 与 $||x||_2$ 是等价的;

24. 闭线性算子: X, Y 是赋范空间, 映射 $T : D(T) \subset X \to Y$ 是线性算子, 乘积赋范空间 $(X \times Y, ||\cdot||)$ 中的元素 $(x, y) \in X \times Y$, 乘积空间的范数 $||(x, y)|| = ||x|| + ||y||$. 若算子 T 的图 $G(T) = \{(x, y) \in X \times Y | x \in D(T), y = Tx\}$ 在 $X \times Y$ 中是闭集, 则称 T 为闭线性算子;

    (a) 注意: 对于线性算子, 闭算子 $\nRightarrow$ 连续 (有界);

25. 闭图像定理: 设 X, Y 是巴拿赫空间, 线性算子 $T : D(T) \subset X \to Y$. 若 $D(T)$ 是闭集, 且 T 是闭算子, 则 T 有界;

(a) 闭算子条件: $T : D(T) \subset X \to Y$ 有界线性, 且 $D(T)$ 是闭集, 则 T 是闭算子;

26. 伴随算子: 设 X, Y 是赋范空间, X 的对偶空间 $X' = \{f : X \to K\text{有界线性泛函}\}$, Y 的对偶空间 $Y' = \{g : Y \to K\text{有界线性泛函}\}$, 有界线性算子 $T : X \to Y$, 则可定义 $T^* : Y' \to X', g \to T^*g$, 满足 $T^*g(x) := g(Tx)$. 称 T^* 为 T 的伴随算子;

    (a) 伴随算子 T^* 是线性有界算子, 且 $||T^*|| = ||T||$;

27. 二次对偶空间: 设 $(X, ||\cdot||)$ 是赋范空间, 对偶空间 $X' = \{f : X \to K\text{有界线性泛函}\}$, 算子 $f \in X'$ 的范数 $||f|| = \sup\limits_{x\in X, x\neq\theta} \frac{|f(x)|}{||x||}$, 则 $(X', ||\cdot||)$ 也是赋范空间. X' 的对偶空间 $(X')' = \{g : X' \to K\text{有界线性泛函}\}$, 再对算子 $g \in (X')'$ 定义范数 $||g|| = \sup\limits_{f\in X', f\neq\theta} \frac{|g(f)|}{||f||}$ 得到赋范空间 $((X')', ||\cdot||)$. 称 $(X')'$ 为 X 的二次对偶空间, 记作 X'';

    (a) 赋范空间 $X, x \in X$, 定义 $g_x : X' \to K, f \to g_x(f) = f(x)$, 则 $g_x \in X''$ 是有界线性泛函, 且 $||g_x|| = ||x||$;

28. 弱收敛: 在赋范空间 X 中, 有序列 $\{x_n\} \subset X$, 若有界线性泛函 $\forall f \in X', f(x_n) \to f(x)$, 则称序列弱收敛, 记为 $x_n \to^\omega x \in X$(手写时 ω 记在 $\to$ 上方);

    (a) 弱收敛的极限唯一;

    (b) 弱收敛序列的任意子序列也是弱收敛;

    (c) 弱收敛序列一定是有界的, 即 $||x_n|| \leq M, \forall n$;

29. 强弱收敛的关系:

    (a) 在赋范空间 X 中, 序列 $\{x_n\} \subset X$, 若序列强收敛 $x_n \to x$, 则序列弱收敛 $x_n \to^\omega x$;

    (b) 在赋范空间 X 中, 若维数 $\dim X = K < +\infty$ 有限, 则弱收敛可推出强收敛;

30. 在希尔伯特空间 H 中, 序列 $x_n \to^\omega x$ 当且仅当 $\forall z \in H$ 都有 $< x_n, z > \to < x, z >$;