基本定义

1. 参考教材: An Introduction of Mathmatical Theory of Inverse Problem(前三章), Kirsch;

2. 反问题举例:

   (a) 确定空间分布物体的密度: 即已知$u(x,y,z)=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta}{\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\right)^3}$, 求 $\rho(\xi,\eta,\zeta)$;

   (b) 逆热传导方程的反问题: 根据热传导方程$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) & x\in\mathbb{R}\\ u|_{t=0}=\phi(x)\end{cases}$,
   已知正问题的值$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)}{4a^2\sqrt{t-\tau}}}d\tau$, 求 $\phi(x)=u(x,0)$;

3. 适定性 (well-posedness): 设 X,Y 是赋范空间, 算子 $K:X\to Y, Kx=y$ 称为适定的若解 x 满足:

   (a) 存在性: 对每个 $y\in Y$, 至少有一个 $x\in X$, 满足 $Kx=y$;

   (b) 唯一性: 对每个 $y\in Y$, 至多由一个 $x\in X$, 满足 $Kx=y$;

   (c) 稳定性: x 连续依赖于 y. 即若 $\{x_n\}\subseteq X$, $\lim\limits_{n\to\infty}Kx_n=Kx$, 则 $x_n\to x$;

4. 不适定性 (ill-posedness): 不满足任意适定性条件, 也称为病态性;

5. 设 X,Y 是赋范空间, 线性紧算子 $K:X\to Y$, 记核空间 $\mathscr{N}(K)=\{x\in X:Kx=0\}$. 若商空间的维数无穷 $\dim\frac{X}{\mathscr{N}(K)}=\infty$, 则 $\exists\{x_n\}\subset X$ 满足 $Kx_n=0$ 但 $\{x_n\}$ 不收敛;

   (a) 特别地, K^{-1} 是无界的;

6. 不适定问题举例:

   (a) (反问题) 第一类 Fredholm 积分方程: 对于 $\int_a^b K(x,t)Z(t)dt=u(x)$, $x\in[c,d]$, 已知 $u(x)$ 求 $Z(t)$. 其中核函数 $K(x,t)$ 在 $[c,d]\times[a,b]$ 上连续;

      已知 $Z_1(t)$ 是 $u_1(x)$ 的解, 构造 $Z_2(t)=Z_1(t)+N\sin\omega t$,

得到 $u_2(x)=\int_a^b K(x,t)Z_2(t)dt=\int_a^b K(x,t)\left[Z_1(t)+N\sin\omega t\right]dt=$ $u_1(x)+N\int_a^b K(x,t)\sin\omega tdt$;

固定 N, 令 $\omega\to\infty$ 充分大, 则由 Riemann-Lebesgue 引理:

因为 $K(x,t)$ 连续, 则 $\int_a^b K(x,t)\sin\omega tdt\to 0$ 充分小;

由 $||u_1(x)-u_2(x)||_2=\left|\left|N\int_a^b K(x,t)\sin\omega tdt\right|\right|_2=|N|\left\{\int_c^d\left[\int_a^b K(x,t)\sin\omega tdt\right]^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\to$ 0,

得 $||Z_1(t)-Z_2(t)||_2=|N|\left\{\int_a^b\sin^2\omega tdt\right\}^{\frac{1}{2}}=|N|\sqrt{\frac{b-a}{2}-\frac{1}{4\omega}(\sin 2b\omega-\sin 2a\omega)}=|N|\sqrt{\cdots}$

当 $\omega\to\infty$ 充分大, $||Z_1(t)-Z_2(t)||_2\to|N|\sqrt{\frac{b-a}{2}}$. 即 $u_2\to u_1$, 但 $Z_2\nrightarrow Z_1$;

$||Z_1(t)-Z_2(t)||_\infty=\max\limits_{t\in[a,b]}|N\sin\omega t|=|N|$;

即测量值 u_2 相对精确值 u_1 存在充分小的误差, 但反问题的解的误差不一定充分小;

(b) (正问题) 二维 Laplace 方程的 Cauchy 问题: 对于定解问题 $\begin{cases}\Delta u(x,y)=0 & -\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=f(x) & \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}=\varphi(\cdots\end{cases}$

其中 $f(x),\varphi(x)$ 已知, 求 $u(x,y)$;

取 $f_1(x)\equiv 0,\varphi_1(x)=\frac{\sin ax}{a}(a>0)$, 则 $u_1(x,y)=\frac{1}{a^2}\sin ax\cdot\sinh ay$ 是该问题的解;

取 $f_2(x)=0,\varphi_2(x)=0$, 则 $u_2(x,y)=0$;

则 $||f_1(x)-f_2(x)||_\infty=0$, $||\varphi_1(x)-\varphi_2(x)||_\infty=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sin ax}{a}\right|=\frac{1}{a}$, $||u_1(x)-u_2(x)||_\infty=\sup\limits_{x,y}\left|\frac{1}{a^2}\sin ax\cdot\sinh ay\right|=\frac{1}{a^2}\sinh ay$(当 $a>0$ 充分大 $a\to\infty$, 该范数任意大);

(c) (反问题) 计算机层析成像 (CT) 问题: 已知射线强度为 I, 射线围绕被观测组织参考系旋转的角度为 δ, 射线经过路程参数化为 u, 组织的射线吸收率为常数 γ, 组织的密度为 ρ, 则 $dI=-\gamma\rho Idu$(解为 $\ln I(u)=-\gamma\int_{u_0}^u\rho(x,y)du$). 射线源到组织参考系的距离为 s, 测量点的坐标为 $se^{i\delta}+uie^{i\delta}$, 则相对强度损失 $\ln I(u)=-\gamma\int_{u_0}^u\rho(se^{i\delta}+uie^{i\delta})du$. 求组织的密度分布 ρ;

定义 Radon 变换: $R\rho:=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(se^{i\delta}+uie^{i\delta})du$;

假定 ρ 径向对称为 $\rho(r)$, 射线为 $(x,0)$, 则相对射线强度 $v(x):=\ln I(\infty)=-2\gamma\int_0^\infty\rho(\sqrt{x^2+u^2})du$,

令 $r^2 = x^2 + u^2$, 则 $v(x) = -2\gamma \int_x^R \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}} \rho(r) dr$,
其中 $R \to \infty$ 是组织的最大厚度;

(d) (反问题) 微分问题: 已知积分方程 $y(t) = \int_0^t x(s)ds$ 和 $y(t)$, 求 $x(t) = y'(t)$;

对 $y(t)$ 作扰动 $y(t) + \delta \sin \frac{t}{\delta^2}$, 对应的解 $x(t) = y'(t) + \frac{1}{\delta} \cos \frac{t}{\delta^2}$;

考虑 $K : X \to Y$,

取 $K : C[0,1] \to C[0,1]$ 且 $y(0) = 0$, 则 $||y_1 - y_2||_\infty = \max\limits_{t\in[0,1]} \left|\delta \sin \frac{t}{\delta^2}\right| = \delta, ||x_1 - x_2||_\infty = \max\limits_{s\in[0,1]} \left|\frac{1}{\delta} \cos \frac{t}{\delta^2}\right| = \frac{1}{\delta}$. 此时方程不适定;

取 $K : C[0,1] \to Y := \{y \in C^1[a,b], 且y(0) = 0\}$,
则 $||y||_Y = \max |y'|, ||y_1 - y_2||_Y = \max\limits_t \left|\frac{1}{\delta} \cos \frac{t}{\delta^2}\right| = \frac{1}{\delta}$. 此时方程适定;

7. 紧积分算子定理: 设 $J = [a.b]$, 且 $K(s,t)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $(TX)(s) = \int_a^b K(s,t)X(t)dt$ 所定义的算子 $K : J \to J$ 是紧算子;

8. 最坏的误差: 对于 $\int_0^t x(s)ds = y(t), t \in [0,1], x \in C[0,1]$;

已知: $y(t)$ 且 $||y''||_\infty \le E$. 实际观测值为 $\tilde{y}(t)$, 误差 $z(t) := y(t) - \tilde{y}(t)$;

条件: $z(0) = z'(0) = 0$ 且 $z'(t) \ge 0$, 观测误差 $||z||_\infty < \delta$;

计算: $|x(t) - \tilde{x}(t)|^2 = |z'(t)|^2 = \left|\int_0^t \frac{d}{ds}|z'(t)|^2 ds\right| = \int_0^t 2z'(s)z''(s)ds \le 4E \int_0^t z'(s)ds = 4Ez(t)$;

结论: $|x - \tilde{x}|_\infty^2 \le 4E\delta$, 即 $||x - \tilde{x}||_\infty \le 2\sqrt{E\delta}$;

9. 范数强弱: 已知线性有界算子 $K : X \to Y$, Banach 空间 X, Y, 子空间 $X_1 \subset X$, 定义 X_1 上的范数为 $||\cdot||_1$, X 上的范数为 $||\cdot||$. 若 $\forall x \in X_1, \exists c > 0, s.t. ||x|| \le c||x||_1$, 则称 $||\cdot||_1$ 是比 $||\cdot||$ 更强的范数;

   (a) 记号: 对于误差 δ, 理想观测值二阶导数上界 E, 记 $F(\delta, E, ||\cdot||_1) := \sup\{||x||_1 : ||Kx|| \le \delta, ||x||_1 \le E\}$. 当 $\delta \to 0$, 有 $F \to 0$;

   (b) 注意: $||\cdot||_1$ 不是指 $1-$ 范数;

10. 引理: 设 $K : X \to Y$ 是线性紧算子, 且 $\dim \frac{X}{N(K)} = \infty$, 则存在 c, δ_0, 使得 $\forall \delta \in (0, \delta_0), F(\delta, E, ||\cdot||_1) \ge c$;

11. 紧算子奇异分解 (singular value decomposition): 设 $K: X \to Y$ 是紧算子, X, Y 是 Hilbert 空间, 伴随算子 (共轭算子)$K^*: Y \to X$, 其中 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 ... > 0$ 是 K 的奇异值, 则存在标准正交系 $\{x_j\} \subset X, \{y_j\} \subset Y$. 有 $Kx_j = u_j y_j$, $K^* y_j = u_j x_j$, $j \in J$, 且 $x = x_0 + \sum\limits_{j\in J}(x, x_j)x_j$, $Kx = \sum\limits_{j\in J} u_j (x, x_j) y_j$. 称 (u_j, x_j, y_j) 为 K 的奇异系;

12. 定理: $F(\delta, E, ||x'||_{L^2}) \leq \sqrt{\delta E}$, $F(\delta, E, ||x''||_{L^2}) \leq \delta^{\frac{2}{3}} E^{\frac{1}{3}}$;

13. 定理: $K: X \to Y$ 是线性紧算子, X, Y 是 Hilbert 空间, K 有稠密的值域, 共轭算子 $K^*: Y \to X$, 则:

    (a) 若 $X_1 := K^*(Y), ||x||_1 := ||(K^*)^{-1}x||_Y, x \in X_1$, 则:

        i. $F(\delta, E, ||\cdot||_1) \leq \sqrt{\delta E}$;

        ii. 存在 $\delta_n \to 0$, 使得 $F(\delta_n, E, ||\cdot||_1) = \sqrt{\delta_n E}$;

    (b) 若 $X_2 := K^*K(X), ||x||_2 := ||(K^*K)^{-1}x||_X, x \in X_2$, 则:

        i. $F(\delta, E, ||\cdot||_2) \leq \delta^{\frac{2}{3}} E^{\frac{1}{3}}$;

        ii. $\exists \delta_n \to 0, s.t.: F(\delta_n, E, ||\cdot||_2) = \delta_n^{\frac{2}{3}} E^{\frac{1}{3}}$;

14. 例题: 对于 $\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & x \in [0, \pi], t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0 & u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$ 有精确解 $u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\sin(nx) \cdot \int_0^\pi u_0(y)\sin(ny)dy := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e^{-n^2 t}\sin(nx)$, 其中 $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi u_0(y)\sin(ny)dy$. 已知 $u(x,T)$, 逆求 $u(x,\tau), \tau < T$;

    解可写成 $u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi K(x,y)u_0(y)dy$, 其中 $K(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\sin(nx)\sin(ny)$;
    若 $\tau \in (0, T)$, 则 $F(\delta, E, ||\cdot||_1) \leq E^{1-\frac{\tau}{T}}\delta^{\frac{\tau}{T}}$;

15. 例题: 数值微分 $N(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}[y(t+h) - y(t)] & t \in (0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{h}[y(t) - y(t-h)] & t \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$, 计算 $||N(t) - y'||_{L^2}, y \in H^2(0,1)$;

    $y(t \pm h) = y(t) \pm y'(t)h + \int_t^{t+h}(t \pm h - s)y''(s)ds$;
    当 $t \in (0, \frac{1}{2})$ 时,

        $N(t) - y'(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h}(t+h-s)y''(s)ds$, 令 $\tau = t+h-s$,
        则 $N(t) - y'(t) = \frac{1}{h}\int_0^h y''(t+h-\tau)\tau d\tau$;

$h^2\int_0^{\frac{1}{2}}|N(t)-y'(t)|^2dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^h y''(t+h-\tau)\tau d\tau\cdot\int_0^h sy''(t+h-s)dsdt=\int_0^h\int_0^h\tau s\left[\frac{y''(t+h-\tau)}{y''(t+h-s)}dt\right]d\tau ds\leq\int_0^h\int_0^h\tau sd\tau ds\frac{\left[\int_0^{\frac{1}{2}}y''(t+h-\tau)^2dt\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\int_0^{\frac{1}{2}}y''(t+h-\tau s)dt\right]^{\frac{1}{2}}}=\left[\int_0^h\int_0^h\tau sd\tau ds\right]||y''||^2_{L^2(0,\frac{1}{2})}=||y''||^2_{L^2(0,\frac{1}{2})}\cdot\frac{h^4}{4}$;

得到 $\int_0^{\frac{1}{2}}|N(t)-y'(t)|^2dt\leq=||y''||_{L^2(0,\frac{1}{2})}\cdot\frac{h^2}{4}\leq\frac{1}{\sqrt{2}}Eh$;

当 $t\in(\frac{1}{2},1)$ 时,

得到 $\int_{\frac{1}{2}}^1|N(t)-y'(t)|^2dt\leq=||y''||_{L^2(0,\frac{1}{2})}\cdot\frac{h^2}{4}$;