第一类积分方程的正则化方法

1. 正则化策略 (正则化方法): 对于线性积分算子 (紧算子)$K: X \to Y$, $Kx = y, \dim X = \infty$. 近似已知 $y \approx y^\delta$ 即 $||y - y^\delta|| \le \delta$, 求解 $Kx^\delta = y^\delta$. 由于 K^{-1} 无界, 所以用有界线性算子族 $R_\alpha \approx K^{-1}$, 其中 $\alpha > 0$ 为参数, R_α 称为正则化算子. 有界线性算子族 R_α 称为一个正则化策略. $R_\alpha : Y \to X, \alpha > 0$, 满足 $\lim\limits_{\alpha\to 0} R_\alpha Kx = x, \forall x$(即 $R_\alpha K$ 逐点收敛于 I);
   (a) $\exists \alpha_j, s.t. ||R_{\alpha_j}|| \to \infty, j \to \infty$;
   (b) $R_\alpha K$ 不一致收敛于 I;

2. Young 不等式: $||f + g||_p \le ||f||_1 \cdot ||g||_p, 1 \le p \le 2$;

3. 例题: 取 $\alpha = h$, 中心差分 $R_h y(t) := \begin{cases} \frac{1}{h}\left[4y(t+\frac{h}{2}) - y(t+h) - 3y(t)\right] & 0 < t < \frac{h}{2} \\ \frac{1}{h}\left[y(t+\frac{h}{2}) - y(t-\frac{h}{2})\right] & \frac{h}{2} \le t \le 1-\frac{h}{2} \\ \frac{1}{h}\left[3y(t) - y(t-h) - 4y(t-\frac{h}{2})\right] & 1-\frac{h}{2} < t \le 1 \end{cases}$,
   证明 R_h 就是一个正则化策略. 即证明:
   (a) $||R_h K||_{L^2(0,1)} \le C$, 即 $R_h K$ 一致有界;
   $R_h y(t) = \frac{1}{h}\int_{t-\frac{h}{2}}^{t+\frac{h}{2}} y'(s)ds = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y'(r+t)dr$, 其中 $s := r + t$;
   $||R_h y(t)||^2_{L^2(\frac{h}{2}, 1-\frac{h}{2})} = \int_{\frac{h}{2}}^{1-\frac{h}{2}} |R_h y(t)|^2 dt = \frac{1}{h^2}\int_{\frac{h}{2}}^{1-\frac{h}{2}} \left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y'(r+t)dr\right]^2 dt \le \frac{1}{h^2}\int_{\frac{h}{2}}^{1-\frac{h}{2}} ||y'||^2_{L^2(0,1)} \cdot \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} ds\right)^2 dt = \int_{\frac{h}{2}}^{1-\frac{h}{2}} dt \cdot ||y'||^2_{L^2(0,1)} \le ||y'||^2_{L^2(0,1)}$;
   所以 $||R_h Kx||_{L^2(0,1)} = ||R_h y(t)||_{L^2(0,1)} \le ||y'||_{L^2(0,1)}$, 即 $R_h K$ 一致有界. 其他区间同理;
   (b) $||R_\alpha Kx - x||_{L^2(0,1)} \to 0$, 即逐点收敛;
   由 Tylor 公式: $y(t \pm \frac{h}{2}) = y(t) \pm \frac{h}{2}y'(t) + \frac{1}{2}\frac{h^2}{4}y''(t) + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{h}{2}} s^2 y'''(t \pm \frac{h}{2} - s)ds$;
   得: $R_h y(t) - y'(t) = \frac{1}{2h}\int_0^{\frac{h}{2}} s^2\left[y'''(t+\frac{h}{2}-s) - y'''(t-\frac{h}{2}-s)\right]ds \le \frac{1}{2h}\left(\int_0^{\frac{h}{2}} s^2 ds\right) \cdot 2||y'''||_{L^2(0,1)}$
   $\int_{\frac{h}{2}}^{1-\frac{h}{2}} |R_h y(t) - y'(t)|^2 dt \le \frac{1}{h^2}\int_{\frac{h}{2}}^{1-\frac{h}{2}} \left(\int_0^{\frac{h}{2}} s^2 ds\right)^2 \cdot ||y'''||^2_{L^2(0,1)} dt = \frac{h^4}{24^2}||y'''||^2_{L^2(0,1)}$

所以$||R_hy-y'||_{L^2(0,1)} =||R_\alpha Kx-x||_{L^2(0,1)}\le C_1||x''(t)||_{L^2(0,1)}h^2\le C_1Eh^2$, 当 $h\to 0$ 时 $||R_hy-y'||_{L^2(0,1)}\to 0$. 其他区间同理;

4. 例题: 对于 $Kx=\int_0^t x(s)ds$, $K:L_0^2(0,1)\to L^2(0,1)$, $L_0^2(0,1)=\{z\in L^2(0,1):\int_0^1 z(s)ds=0\}$. Gauss 核 $\psi_\alpha(t)=\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_\alpha(t)dt=1$, $||\psi'_\alpha||_{L^1}=\frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}}$. 定义 $\psi_\alpha * y:=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_\alpha(t-s)y(s)ds=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_\alpha(s)y(t-s)ds$, 由 Young 不等式 $||\psi_\alpha * y||_{L^2}\le||\psi_\alpha||_{L^1}\cdot||y||_{L^2}=||y||_{L^2}$ 知卷积算子是一致有界算子. 证明 K 是一个正则化策略:

   (a) 准备知识: $||\psi_\alpha * z-z||_{L^2}\to 0$, $\alpha\to 0$, $z\in L^2(0,1)$, $||\psi_\alpha * z-z||_{L^2(\mathbb{R})}\le\sqrt{2}\alpha||z'||_{L^2(0,1)}$;ß

   定义 $\mathcal{F}z(t):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}z(s)e^{-ist}ds$,则 $\mathcal{F}z'(t)=(-it)\mathcal{F}z(t)$;
   $||\psi_\alpha * z-z||_{L^2(\mathbb{R})}=||\mathcal{F}(\psi_\alpha * z)-\mathcal{F}(z)||_{L^2(\mathbb{R})}=||[\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(\psi_\alpha)-1]\mathcal{F}(z)||_{L^2(\mathbb{R})}=||\psi_\alpha(t)it\mathcal{F}(z')||_{L^2(\mathbb{R})}$;
   $\psi_\alpha(t)=\frac{1}{it}(1-e^{-\frac{\alpha^2t^2}{4}})$
   所以$||\psi_\alpha * z-z||_{L^2(\mathbb{R})}=||\psi_\alpha\mathcal{F}(z')||_{L^2}\le||\psi_\alpha||_\infty\cdot||z'||_{L^2(0,1)}$;

   (b) 证明:

   $||R_\alpha y||_{L^2(0,1)}\le\left\{\int_0^1\left[(\psi'_\alpha * y)(t)-\int_0^1(\psi'_\alpha * y)(s)ds\right]^2dt\right\}^{\frac{1}{2}}\le 2||\psi'_\alpha||_{L^1(\mathbb{R})}\cdot||y||_{L^2(0,1)}\le\frac{4}{\alpha\sqrt{\pi}}||y||_{L^2(0,1)}$;
   取 $y=Kx$, $||R_\alpha Kx||_{L^2(0,1)}\le 2||\psi_\alpha * x(t)||_{L^2(0,1)}\le 2||\psi_\alpha||_{L^2(\mathbb{R})}\cdot||x(t)||_{L^2(0,1)}=2||x(t)||_{L^2(0,1)}$,则 $||R_\alpha Kx||_{L^2(0,1)}\le 2||x(t)||_{L^2(0,1)}$,
   即 $R_\alpha K$ 一致有界;
   $R_\alpha Kx(t)-x(t)=\psi_\alpha * x(t)-\int_0^1(\psi_\alpha * x)ds-x(t)=(\psi_\alpha * x)(t)-x(t)-\int_0^1[(\psi_\alpha * x)(s)-x(s)]ds$, 所以 $||R_\alpha Kx-x||_{L^2(0,1)}\le 2||\psi_\alpha * x(t)-x(t)||_{L^2(0,1)}\le 2\sqrt{2}\alpha||x'||_{L^2(0,1)}$;

5. 设线性紧算子 K 的滤波函数 $q(\alpha,\mu)$ 满足: (1). $|q(\alpha,\mu)|\le 1, 0<\mu<||K||$; (2). $\exists C(\alpha)$, s.t.$|q(\alpha,\mu)|\le C(\alpha)\mu,\forall\mu$; (3). $\lim\limits_{\alpha\to 0}q(\alpha,\mu)=1,\forall\mu$. 则 $R_\alpha:Y\to X, R_\alpha y:=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{q(\alpha,\mu)}{\mu_j}(y,y_j)x_j, y\in Y$ 是一个正则化策略, 且 $||R_\alpha||\le C(\alpha)$;

   (a) 其中 (μ_j,x_j,y_j) 是算子 R_α 的奇异系;

6. 引理: 对于 Hilbert 空间 $X,Y,\exists\hat{x}\in X, s.t.||K\hat{x}-y||\le||Kx-y||, x\in X$ 等价于 $K^*K\hat{x}=K^*y$(法方程);

7. Tikhonov 正则化方法: 求解 Tikhonov 泛函的极小问题;

   (a) Tikhonov 泛函: 对于线性紧算子 $K : X \to Y$, $\alpha > 0$, $J_\alpha(x) = ||Kx - y||^2 + \alpha||x||^2$;

   (b) $J_\alpha(x)$ 的极小值问题有唯一解 x^α;

   (c) 极小化 x^α 是法方程 $\alpha x^\alpha + K^*Kx^\alpha = K^*y$ 的唯一解;

8. 定义 $R_\alpha := (\alpha I + K^*K)^{-1}K^*$, 对于线性紧算子 $K : X \to Y$, 有

   (a) $\alpha I + K^*K$ 有有界逆, 则 R_α 是正则化策略. $||R_\alpha|| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$, $R_\alpha y^\delta$ 满足 $(\alpha I + K^*K)x^{\alpha,\delta} = K^*y^\delta$. 当 $\alpha(\delta) \to 0, \delta \to 0, \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \to 0$ 时, $\alpha(\delta)$ 是容许的;

   (b) $x = K^*z \in K^*(Y)$, 取 $\alpha(\delta) = c\frac{\delta}{E}$ 时, $||x^{\alpha,\delta} - x|| \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{c})\sqrt{\delta E}$;

   (c) $x = K^*Kz \in K^*K(x)$, 取 $\alpha(\delta) = c(\frac{\delta}{E})^{\frac{2}{3}}$ 时, $||x^{\alpha,\delta} - x|| \leq (\frac{1}{2\sqrt{c}} + c)E^{\frac{1}{3}}\delta^{\frac{2}{3}}$;

9. Landeweber 迭代: 对于 $Kx = y$, $x = x - aK^*Kx + aK^*y = (I - aK^*K)x + aK^*y, a > 0$. 即迭代格式 $\begin{cases} x^0 = 0 \\ x^m = (I - aK^*K)x^{m-1} + aK^*y \quad m = 1, 2... \end{cases}$;

   (a) 设 $\psi : X \to R$, $\psi(x) = \frac{1}{2}||Kx - y||^2$, 则 $\psi(x)$ 的 Frechet 导数 $\psi'(z)x = Re(Kz - y, Kx) = Re(K^*(Kz - y), x)$, $xz \in X$. 因此, $\psi'(z)$ 可以由 $K^*(Kz - y)$ 得到, 即 Landweber 迭代 $x^m = x^{m-1} - aK^*(Kx^{m-1} - y)$;

10. 已知线性紧算子 $K : X \to Y$, 取 $\alpha = \frac{1}{m}$, 则 R_m 就是正则化策略, 且 $||R_m|| \leq C(\alpha) = \sqrt{\frac{a}{\alpha}} = \sqrt{am}$;

    (a) $m(\delta) \to 0, (\delta \to 0)$, 且 $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \to 0$, 则 $m(\delta)$ 是容许的;