1 基本定义

1. 参考教材: An Introduction of Mathmatical Theory of Inverse Problem(前三章), Kirsch;
2. 反问题举例:
   (a) 确定空间分布物体的密度: 即已知 $u(x,y,z)=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta}{\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\right)^3}$, 求 $\rho(\xi,\eta,\zeta)$;
   (b) 逆热传导方程的反问题: 根据热传导方程 $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) & x\in\mathbb{R}\\ u|_{t=0}=\phi(x)\end{cases}$,
   已知正问题的值 $u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)}{4a^2\sqrt{t-\tau}}}d\tau$, 求 $\phi(x)=u(x,0)$;
3. 适定性 (well-posedness): 设 X,Y 是赋范空间, 算子 $K:X\to Y$, $Kx=y$ 称为适定的若解 x 满足:
   (a) 存在性: 对每个 $y\in Y$, 至少有一个 $x\in X$, 满足 $Kx=y$;
   (b) 唯一性: 对每个 $y\in Y$, 至多由一个 $x\in X$, 满足 $Kx=y$;
   (c) 稳定性: x 连续依赖于 y. 即若 $\{x_n\}\subseteq X$, $\lim\limits_{n\to\infty}Kx_n=Kx$, 则 $x_n\to x$;
4. 不适定性 (ill-posedness): 不满足任意适定性条件, 也称为病态性;
5. 设 X,Y 是赋范空间, 线性紧算子 $K:X\to Y$, 记核空间 $\mathcal{N}(K)=\{x\in X:Kx=0\}$. 若商空间的维数无穷 $\dim\frac{X}{\mathcal{N}(K)}=\infty$, 则 $\exists\{x_n\}\subset X$ 满足 $Kx_n=0$ 但 $\{x_n\}$ 不收敛;
   (a) 特别地, K^{-1} 是无界的;
6. 不适定问题举例:
   (a) (反问题) 第一类 Fredholm 积分方程: 对于 $\int_a^b K(x,t)Z(t)dt=u(x)$, $x\in[c,d]$, 已知 $u(x)$ 求 $Z(t)$. 其中核函数 $K(x,t)$ 在 $[c,d]\times[a,b]$ 上连续;

   已知 $Z_1(t)$ 是 $u_1(x)$ 的解, 构造 $Z_2(t)=Z_1(t)+N\sin\omega t$,

得到 $u_2(x)=\int_a^b K(x,t)Z_2(t)dt$= $\int_a^b K(x,t)\left[Z_1(t)+N\sin\omega t\right]dt$= $u_1(x)+N\int_a^b K(x,t)\sin\omega t dt$;

固定 N, 令 $\omega\to\infty$ 充分大, 则由 Riemann-Lebesgue 引理:

因为 $K(x,t)$ 连续, 则 $\int_a^b K(x,t)\sin\omega t dt\to 0$ 充分小;

由 $||u_1(x)-u_2(x)||_2$= $\left|\left|N\int_a^b K(x,t)\sin\omega t dt\right|\right|_2$= $|N|\left\{\int_c^d\left[\int_a^b K(x,t)\sin\omega t dt\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}\to$ 0,

得 $||Z_1(t)-Z_2(t)||_2$= $|N|\left\{\int_a^b\sin^2\omega t dt\right\}^{\frac{1}{2}}$= $|N|\sqrt{\frac{b-a}{2}-\frac{1}{4\omega}(\sin 2b\omega-\sin 2a\omega)}$=$|N|\sqrt{}$

当 $\omega\to\infty$ 充分大, $||Z_1(t)-Z_2(t)||_2\to|N|\sqrt{\frac{b-a}{2}}$. 即 $u_2\to u_1$, 但 $Z_2\nrightarrow Z_1$;

$||Z_1(t)-Z_2(t)||_\infty=\max\limits_{t\in[a,b]}|N\sin\omega t|$= $|N|$;

即测量值 u_2 相对精确值 u_1 存在充分小的误差, 但反问题的解的误差不一定充分小;

(b) (正问题) 二维 Laplace 方程的 Cauchy 问题: 对于定解问题 $\begin{cases}\Delta u(x,y)=0 & -\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=f(x) & \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}=\varphi(\end{cases}$

其中 $f(x),\varphi(x)$ 已知, 求 $u(x,y)$;

取 $f_1(x)\equiv 0,\varphi_1(x)=\frac{\sin ax}{a}(a>0)$, 则 $u_1(x,y)=\frac{1}{a^2}\sin ax\cdot$ $\sinh ay$ 是该问题的解;

取 $f_2(x)=0,\varphi_2(x)=0$, 则 $u_2(x,y)=0$;

则 $||f_1(x)-f_2(x)||_\infty=0$, $||\varphi_1(x)-\varphi_2(x)||_\infty$= $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sin ax}{a}\right|$= $\frac{1}{a}$, $||u_1(x)-u_2(x)||_\infty$= $\sup\limits_{x,y}\left|\frac{1}{a^2}\sin ax\cdot\sinh ay\right|$= $\frac{1}{a^2}\sinh ay$(当 $a>0$ 充分大 $a\to\infty$, 该范数任意大);

(c) (反问题) 计算机层析成像 (CT) 问题: 已知射线强度为 I, 射线围绕被观测组织参考系旋转的角度为 δ, 射线经过路程参数化为 u, 组织的射线吸收率为常数 γ, 组织的密度为 ρ , 则 $dI=-\gamma\rho I du$(解为 $\ln I(u)=-\gamma\int_{u_0}^u\rho(x,y)du$). 射线源到组织参考系的距离为 s, 测量点的坐标为 $se^{i\delta}+uie^{i\delta}$, 则相对强度损失 $\ln I(u)=-\gamma\int_{u_0}^u\rho(se^{i\delta}+uie^{i\delta})du$. 求组织的密度分布 ρ;

定义 Radon 变换: $R\rho:=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(se^{i\delta}+uie^{i\delta})du$;

假定 ρ 径向对称为 $\rho(r)$, 射线为 $(x,0)$, 则相对射线强度 $v(x):=\ln I(\infty)=-2\gamma\int_0^\infty\rho(\sqrt{x^2+u^2})du$,

令 $r^2 = x^2 + u^2$, 则 $v(x) = -2\gamma \int_x^R \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\rho(r)dr$,
其中 $R \to \infty$ 是组织的最大厚度;

(d) (反问题) 微分问题: 已知积分方程 $y(t) = \int_0^t x(s)ds$ 和 $y(t)$, 求 $x(t) = y'(t)$;

对 $y(t)$ 作扰动 $y(t) + \delta \sin \frac{t}{\delta^2}$, 对应的解 $x(t) = y'(t) + \frac{1}{\delta} \cos \frac{t}{\delta^2}$;

考虑 $K : X \to Y$,

取 $K : C[0,1] \to C[0,1]$ 且 $y(0) = 0$, 则 $||y_1 - y_2||_\infty = \max\limits_{t\in[0,1]} \left|\delta \sin \frac{t}{\delta^2}\right| = \delta, ||x_1-x_2||_\infty = \max\limits_{s\in[0,1]} \left|\frac{1}{\delta} \cos \frac{t}{\delta^2}\right| = \frac{1}{\delta}$. 此时方程不适定;

取 $K : C[0,1] \to Y := \{y \in C^1[a,b], 且y(0) = 0\}$,
则 $||y||_Y = \max |y'|, ||y_1 - y_2||_Y = \max\limits_t \left|\frac{1}{\delta} \cos \frac{t}{\delta^2}\right| = \frac{1}{\delta}$. 此时方程适定;

7. 紧积分算子定理: 设 $J = [a.b]$, 且 $K(s,t)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $(TX)(s) = \int_a^b K(s,t)X(t)dt$ 所定义的算子 $K : J \to J$ 是紧算子;

8. 最坏的误差: 对于 $\int_0^t x(s)ds = y(t), t \in [0,1], x \in C[0,1]$;

已知: $y(t)$ 且 $||y''||_\infty \le E$. 实际观测值为 $\tilde{y}(t)$, 误差 $z(t) := y(t) - \tilde{y}(t)$;

条件: $z(0) = z'(0) = 0$ 且 $z'(t) \ge 0$, 观测误差 $||z||_\infty < \delta$;

计算: $|x(t) - \tilde{x}(t)|^2 = |z'(t)|^2 = \left|\int_0^t \frac{d}{ds}|z'(t)|^2 ds\right| = \int_0^t 2z'(s)z''(s)ds \le 4E\int_0^t z'(s)ds = 4Ez(t)$;

结论: $|x - \tilde{x}|_\infty^2 \le 4E\delta$, 即 $||x - \tilde{x}||_\infty \le 2\sqrt{E\delta}$;

9. 范数强弱: 已知线性有界算子 $K : X \to Y$, Banach 空间 X, Y, 子空间 $X_1 \subset X$, 定义 X_1 上的范数为 $||\cdot||_1$, X 上的范数为 $||\cdot||$. 若 $\forall x \in X_1, \exists c > 0, s.t. ||x|| \le c||x||_1$, 则称 $||\cdot||_1$ 是比 $||\cdot||$ 更强的范数;

(a) 记号: 对于误差 δ, 理想观测值二阶导数上界 E, 记 $F(\delta, E, ||\cdot||_1) := \sup\{||x||_1 : ||Kx|| \le \delta, ||x||_1 \le E\}$. 当 $\delta \to 0$, 有 $F \to 0$;

(b) 注意: $||\cdot||_1$ 不是指 $1-$ 范数;

10. 引理: 设 $K : X \to Y$ 是线性紧算子, 且 $\dim \frac{X}{N(K)} = \infty$, 则存在 c, δ_0, 使得 $\forall \delta \in (0, \delta_0), F(\delta, E, ||\cdot||_1) \ge c$;

11. 紧算子奇异分解 (singular value decomposition): 设 $K: X \to Y$ 是紧算子, X, Y 是 Hilbert 空间, 伴随算子 (共轭算子)$K^*: Y \to X$, 其中 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 ... > 0$ 是 K 的奇异值, 则存在标准正交系 $\{x_j\} \subset X, \{y_j\} \subset Y$. 有 $Kx_j = u_j y_j$, $K^* y_j = u_j x_j$, $j \in J$, 且 $x = x_0 + \sum\limits_{j \in J} (x, x_j) x_j$, $Kx = \sum\limits_{j \in J} u_j (x, x_j) y_j$. 称 (u_j, x_j, y_j) 为 K 的奇异系;

12. 定理: $F(\delta, E, ||x'||_{L^2}) \leq \sqrt{\delta E}$, $F(\delta, E, ||x''||_{L^2}) \leq \delta^{\frac{2}{3}} E^{\frac{1}{3}}$;

13. 定理: $K: X \to Y$ 是线性紧算子, X, Y 是 Hilbert 空间, K 有稠密的值域, 共轭算子 $K^*: Y \to X$, 则:

    (a) 若 $X_1 := K^*(Y)$, $||x||_1 := ||(K^*)^{-1} x||_Y$, $x \in X_1$, 则:

      i. $F(\delta, E, ||\cdot||_1) \leq \sqrt{\delta E}$;

      ii. 存在 $\delta_n \to 0$, 使得 $F(\delta_n, E, ||\cdot||_1) = \sqrt{\delta_n E}$;

    (b) 若 $X_2 := K^* K(X)$, $||x||_2 := ||(K^* K)^{-1} x||_X$, $x \in X_2$, 则:

      i. $F(\delta, E, ||\cdot||_2) \leq \delta^{\frac{2}{3}} E^{\frac{1}{3}}$;

      ii. $\exists \delta_n \to 0, s.t.: F(\delta_n, E, ||\cdot||_2) = \delta_n^{\frac{2}{3}} E^{\frac{1}{3}}$;

14. 例题: 对于 $\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & x \in [0, \pi], t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0 & u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$ 有精确解 $u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \sin(nx) \cdot \int_0^\pi u_0(y) \sin(ny) dy := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e^{-n^2 t} \sin(nx)$, 其中 $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_0(y) \sin(ny) dy$. 已知 $u(x, T)$, 逆求 $u(x, \tau)$, $\tau < T$;

    解可写成 $u(x,t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi K(x,y) u_0(y) dy$, 其中 $K(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \sin(nx) \sin(ny)$;
    若 $\tau \in (0, T)$, 则 $F(\delta, E, ||\cdot||_1) \leq E^{1 - \frac{\tau}{T}} \delta^{\frac{\tau}{T}}$;

15. 例题: 数值微分 $N(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}[y(t+h) - y(t)] & t \in (0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{h}[y(t) - y(t-h)] & t \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$, 计算 $||N(t) - y'||_{L^2}$, $y \in H^2(0,1)$;

    $y(t \pm h) = y(t) \pm y'(t) h + \int_t^{t+h} (t \pm h - s) y''(s) ds$;
    当 $t \in (0, \frac{1}{2})$ 时,

      $N(t) - y'(t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (t + h - s) y''(s) ds$, 令 $\tau = t + h - s$,
      则 $N(t) - y'(t) = \frac{1}{h} \int_0^h y''(t + h - \tau) \tau d\tau$;

$h^2\int_0^{\frac{1}{2}}|N(t)-y'(t)|^2dt = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^h y''(t+h-\tau)\tau d\tau \cdot \int_0^h sy''(t+h-s)dsdt = \int_0^h\int_0^h \tau s\left[\frac{y''(t+h-\tau)}{y''(t+h-s)}dt\right]d\tau ds \le \int_0^h\int_0^h \tau sd\tau ds\frac{\left[\int_0^{\frac{1}{2}}y''(t+h-\tau)^2dt\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\int_0^{\frac{1}{2}}y''(t+h-\tau s)dt\right]^{\frac{1}{2}}} = \left[\int_0^h\int_0^h \tau sd\tau ds\right]||y''||^2_{L^2(0,\frac{1}{2})} = ||y''||^2_{L^2(0,\frac{1}{2})}\cdot\frac{h^4}{4}$;

得到 $\int_0^{\frac{1}{2}}|N(t)-y'(t)|^2dt \le= ||y''||_{L^2(0,\frac{1}{2})}\cdot\frac{h^2}{4} \le \frac{1}{\sqrt{2}}Eh$;

当 $t\in(\frac{1}{2},1)$ 时,

得到 $\int_{\frac{1}{2}}^1|N(t)-y'(t)|^2dt \le= ||y''||_{L^2(0,\frac{1}{2})}\cdot\frac{h^2}{4}$;

2 第一类积分方程的正则化方法

1. 正则化策略 (正则化方法): 对于线性积分算子 (紧算子)$K: X\to Y$, $Kx=y, \dim X=\infty$. 近似已知 $y\approx y^\delta$ 即 $||y-y^\delta||\le\delta$, 求解 $Kx^\delta=y^\delta$. 由于 K^{-1} 无界, 所以用有界线性算子族 $R_\alpha\approx K^{-1}$, 其中 $\alpha>0$ 为参数, R_α 称为正则化算子. 有界线性算子族 R_α 称为一个正则化策略. $R_\alpha: Y\to X, \alpha>0$, 满足 $\lim\limits_{\alpha\to 0}R_\alpha Kx=x, \forall x$(即 $R_\alpha K$ 逐点收敛于 I);
   (a) $\exists\alpha_j, s.t.||R_{\alpha_j}||\to\infty, j\to\infty$;
   (b) $R_\alpha K$ 不一致收敛于 I;
2. Young 不等式: $||f+g||_p\le||f||_1\cdot||g||_p, 1\le p\le 2$;
3. 例题: 取 $\alpha=h$, 中心差分 $R_hy(t) := \begin{cases}\frac{1}{h}\left[4y(t+\frac{h}{2})-y(t+h)-3y(t)\right] & 0<t<\frac{h}{2}\\ \frac{1}{h}\left[y(t+\frac{h}{2})-y(t-\frac{h}{2})\right] & \frac{h}{2}\le t\le 1-\frac{h}{2}\\ \frac{1}{h}\left[3y(t)-y(t-h)-4y(t-\frac{h}{2})\right] & 1-\frac{h}{2}<t\le 1\end{cases}$,
   证明 R_h 就是一个正则化策略. 即证明:
   (a) $||R_hK||_{L^2(0,1)}\le C$, 即 R_hK 一致有界;
   $R_hy(t) = \frac{1}{h}\int_{t-\frac{h}{2}}^{t+\frac{h}{2}}y'(s)ds = \frac{1}{h}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}y'(r+t)dr$, 其中 $s := r+t$;
   $||R_hy(t)||^2_{L^2(\frac{h}{2},1-\frac{h}{2})} = \int_{\frac{h}{2}}^{1-\frac{h}{2}}|R_hy(t)|^2dt = \frac{1}{h^2}\int_{\frac{h}{2}}^{1-\frac{h}{2}}\left[\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}y'(r+t)dr\right]^2dt \le \frac{1}{h^2}\int_{\frac{h}{2}}^{1-\frac{h}{2}}||y'||^2_{L^2(0,1)}\cdot\left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}ds\right)^2dt = \int_{\frac{h}{2}}^{1-\frac{h}{2}}dt\cdot||y'||^2_{L^2(0,1)} \le ||y'||^2_{L^2(0,1)}$;

所以 $||R_hKx||_{L^2(0,1)} = ||R_hy(t)||_{L^2(0,1)} \leq ||y'||_{L^2(0,1)}$, 即 R_hK 一致有界. 其他区间同理;

(b) $||R_\alpha Kx - x||_{L^2(0,1)} \to 0$, 即逐点收敛;

由 Tylor 公式: $y(t \pm \frac{h}{2}) = y(t) \pm \frac{h}{2}y'(t) + \frac{1}{2}\frac{h^2}{4}y''(t) + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{h}{2}} s^2 y'''(t \pm \frac{h}{2} - s)ds$;

得: $R_hy(t) - y'(t) = \frac{1}{2h}\int_0^{\frac{h}{2}} s^2 \left[y'''(t + \frac{h}{2} - s) - y'''(t - \frac{h}{2} - s)\right] ds \leq \frac{1}{2h}\left(\int_0^{\frac{h}{2}} s^2 ds\right) \cdot 2||y'''||_{L^2(0,1)}$

$\int_{\frac{h}{2}}^{1-\frac{h}{2}} |R_hy(t) - y'(t)|^2 dt \leq \frac{1}{h^2}\int_{\frac{h}{2}}^{1-\frac{h}{2}} \left(\int_0^{\frac{h}{2}} s^2 ds\right)^2 \cdot ||y'''||^2_{L^2(0,1)} dt = \frac{h^4}{24^2}||y'''||^2_{L^2(0,1)}$

所以 $||R_hy - y'||_{L^2(0,1)} = ||R_\alpha Kx - x||_{L^2(0,1)} \leq C_1||x''(t)||_{L^2(0,1)}h^2 \leq C_1Eh^2$, 当 $h \to 0$ 时 $||R_hy - y'||_{L^2(0,1)} \to 0$. 其他区间同理;

4. 例题: 对于 $Kx = \int_0^t x(s)ds$, $K : L_0^2(0,1) \to L^2(0,1)$, $L_0^2(0,1) = \{z \in L^2(0,1) : \int_0^1 z(s)ds = 0\}$. Gauss 核 $\psi_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\alpha(t)dt = 1$, $||\psi'_\alpha||_{L^1} = \frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}}$. 定义 $\psi_\alpha * y := \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\alpha(t-s)y(s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\alpha(s)y(t-s)ds$, 由 Young 不等式 $||\psi_\alpha * y||_{L^2} \leq ||\psi_\alpha||_{L^1} \cdot ||y||_{L^2} = ||y||_{L^2}$ 知卷积算子是一致有界算子. 证明 K 是一个正则化策略:

(a) 准备知识: $||\psi_\alpha * z - z||_{L^2} \to 0$, $\alpha \to 0$, $z \in L^2(0,1)$, $||\psi_\alpha * z - z||_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2}\alpha||z'||_{L^2(0,1)}$;ß

定义 $\mathcal{F}z(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} z(s)e^{-ist}ds$, 则 $\mathcal{F}z'(t) = (-it)\mathcal{F}z(t)$;

$||\psi_\alpha * z - z||_{L^2(\mathbb{R})} = ||\mathcal{F}(\psi_\alpha * z) - \mathcal{F}(z)||_{L^2(\mathbb{R})} = ||[\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(\psi_\alpha) - 1]\mathcal{F}(z)||_{L^2(\mathbb{R})} = ||\psi_\alpha(t)it\mathcal{F}(z')||_{L^2(\mathbb{R})}$;

$\psi_\alpha(t) = \frac{1}{it}(1 - e^{-\frac{\alpha^2 t^2}{4}})$

所以 $||\psi_\alpha * z - z||_{L^2(\mathbb{R})} = ||\psi_\alpha\mathcal{F}(z')||_{L^2} \leq ||\psi_\alpha||_\infty \cdot ||z'||_{L^2(0,1)}$;

(b) 证明:

$||R_\alpha y||_{L^2(0,1)} \leq \left\{\int_0^1 \left[(\psi'_\alpha * y)(t) - \int_0^1 (\psi'_\alpha * y)(s)ds\right]^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} \leq 2||\psi'_\alpha||_{L^1(\mathbb{R})} \cdot ||y||_{L^2(0,1)} \leq \frac{4}{\alpha\sqrt{\pi}}||y||_{L^2(0,1)}$;

取 $y = Kx$, $||R_\alpha Kx||_{L^2(0,1)} \leq 2||\psi_\alpha * x(t)||_{L^2(0,1)} \leq 2||\psi_\alpha||_{L^2(\mathbb{R})} \cdot ||x(t)||_{L^2(0,1)} = 2||x(t)||_{L^2(0,1)}$, 则 $||R_\alpha Kx||_{L^2(0,1)} \leq 2||x(t)||_{L^2(0,1)}$, 即 $R_\alpha K$ 一致有界;

$R_\alpha Kx(t) - x(t) = \psi_\alpha * x(t) - \int_0^1 (\psi_\alpha * x)ds - x(t) = (\psi_\alpha *$

$x)(t) - x(t) - \int_0^1[(\psi_\alpha * x)(s) - x(s)]ds$, 所以 $||R_\alpha Kx - x||_{L^2(0,1)} \leq 2||\psi_\alpha * x(t) - x(t)||_{L^2(0,1)} \leq 2\sqrt{2}\alpha||x'||_{L^2(0,1)}$;

5. 设线性紧算子 K 的滤波函数 $q(\alpha,\mu)$ 满足: (1). $|q(\alpha,\mu)| \leq 1, 0 < \mu < ||K||$; (2). $\exists C(\alpha)$, s.t.$|q(\alpha,\mu)| \leq C(\alpha)\mu, \forall\mu$; (3). $\lim\limits_{\alpha\to 0} q(\alpha,\mu) = 1, \forall\mu$. 则 $R_\alpha : Y \to X, R_\alpha y := \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{q(\alpha,\mu)}{\mu_j}(y, y_j)x_j, y \in Y$ 是一个正则化策略, 且 $||R_\alpha|| \leq C(\alpha)$;

   (a) 其中 (μ_j, x_j, y_j) 是算子 R_α 的奇异系;

6. 引理: 对于 Hilbert 空间 $X, Y, \exists\hat{x} \in X, s.t.||K\hat{x} - y|| \leq ||Kx - y||, x \in X$ 等价于 $K^*K\hat{x} = K^*y$(法方程);

7. Tikhonov 正则化方法: 求解 Tikhonov 泛函的极小问题;

   (a) Tikhonov 泛函: 对于线性紧算子 $K : X \to Y, \alpha > 0, J_\alpha(x) = ||Kx - y||^2 + \alpha||x||^2$;
   (b) $J_\alpha(x)$ 的极小值问题有唯一解 x^α;
   (c) 极小化 x^α 是法方程 $\alpha x^\alpha + K^*Kx^\alpha = K^*y$ 的唯一解;

8. 定义 $R_\alpha := (\alpha I + K^*K)^{-1}K^*$, 对于线性紧算子 $K : X \to Y$, 有

   (a) $\alpha I + K^*K$ 有有界逆, 则 R_α 是正则化策略. $||R_\alpha|| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, R_\alpha y^\delta$ 满足 $(\alpha I + K^*K)x^{\alpha,\delta} = K^*y^\delta$. 当 $\alpha(\delta) \to 0, \delta \to 0, \frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \to 0$ 时, $\alpha(\delta)$ 是容许的;
   (b) $x = K^*z \in K^*(Y)$, 取 $\alpha(\delta) = c\frac{\delta}{E}$ 时, $||x^{\alpha,\delta} - x|| \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{c})\sqrt{\delta E}$;
   (c) $x = K^*Kz \in K^*K(x)$, 取 $\alpha(\delta) = c(\frac{\delta}{E})^{\frac{2}{3}}$ 时, $||x^{\alpha,\delta} - x|| \leq (\frac{1}{2\sqrt{c}} + c)E^{\frac{1}{3}}\delta^{\frac{2}{3}}$;

9. Landeweber 迭代: 对于 $Kx = y, x = x - aK^*Kx + aK^*y = (I - aK^*K)x + aK^*y, a > 0$. 即迭代格式 $\begin{cases} x^0 = 0 \\ x^m = (I - aK^*K)x^{m-1} + aK^*y \quad m = 1, 2... \end{cases}$;

   (a) 设 $\psi : X \to R, \psi(x) = \frac{1}{2}||Kx - y||^2$, 则 $\psi(x)$ 的 Frechet 导数 $\psi'(z)x = Re(Kz - y, Kx) = Re(K^*(Kz - y), x), xz \in X$. 因此, $\psi'(z)$ 可以由 $K^*(Kz - y)$ 得到, 即 Landweber 迭代 $x^m = x^{m-1} - aK^*(Kx^{m-1} - y)$;

10. 已知线性紧算子 $K : X \to Y$, 取 $\alpha = \frac{1}{m}$, 则 R_m 就是正则化策略, 且 $||R_m|| \leq C(\alpha) = \sqrt{\frac{a}{\alpha}} = \sqrt{am}$;

    (a) $m(\delta) \to 0, (\delta \to 0)$, 且 $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \to 0$, 则 $m(\delta)$ 是容许的;