一. 基础知识

1. 偏微分方程基本概念

[**偏微分方程的一般形式**] $F\left(x, y, ..., u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, ...\right) = 0$

阶: 一个偏微分方程中所出现的位置函数导数的最高阶数;

次: 最高阶数的幂次;

线性: 微分方程中各项关于未知函数及其各阶导数都是一次;

拟线性: 对未知函数的所有最高阶导数都是线性的;

自由项: 不带未知函数及其导数的项;

齐次: 自由项恒为零的微分方程;

注意: 对于相互依赖的几个偏微分方程, 需要把它们合并成一个单独方程再确定.

[**典型的二阶线性偏微分方程**]

Laplace 方程: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Poisson 方程: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$

[**两个自变量的二阶线性偏微分方程标准形式**] 每一个具有两个自变量的二阶线性偏微分方程都可以化为标准形式.

标准形式: $a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$

1. 双曲型方程: $b^2 - 4ac > 0$, 可转换为 $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + ... = 0$ 或 $u_{\xi\eta} + ... = 0$, 如波动方程;

2. 抛物型方程: $b^2 - 4ac = 0$, 可转换为 $u_{\xi\xi} + ... = 0$, 如热传导方程或扩散方程;

3. 椭圆型方程: $b^2 - 4ac < 0$, 可转换为 $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + ... = 0$, 如 Laplace 和 Poisson 方程;

另一标准形式: $a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$, 判别式 $b^2 - ac$.

[**一阶齐次线性方程的特征方程**] 给定一阶齐次线性方程 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$, 其中 a_i 为连续可微函数, 在所考虑的区域内的每一点不同时为零. 则方程组 $\frac{dx_i}{dt} = a_i(x_1, x_2, ..., x_n), (i \in Z^*)$ 或 $\frac{dx_1}{a_1(x_1, x_2, ..., x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, x_2, ..., x_n)} = ... = \frac{dx_n}{a_n(x_1, x_2, ..., x_n)}$ 被称为一阶齐次线性偏微分方程的特征方程.

[**一阶齐次线性方程的特征曲线**] 如果曲线 $l : x_i = x_i(t), (i \in Z^*)$ 满足特征方程, 则曲线 l 被称为一阶齐次线性偏微分方程的特征曲线.

[**二阶线性偏微分方程的特征线**]

对于二阶线性偏微分方程 $a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu+g=0$, 令 $\begin{cases}\xi=\phi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$.

有 $\begin{cases}u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial x}\\ u_y=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \phi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \psi}{\partial y}\end{cases}$, 从而 $\begin{cases}u_{xx}=u_{\xi\xi}\phi_x^2+u_{\eta\eta}\psi_x^2+2u_{\xi\eta}\phi_x\psi_x+u_\xi\phi_{xx}+u_\eta\psi_{xx}\\ u_{xy}=u_{\xi\xi}\phi_x\phi_y+u_{\eta\eta}\psi_x\psi_y+u_{\xi\eta}\left(\phi_x\psi_y+\phi_y\psi_x\right)\\ \qquad +u_\xi\phi_{xy}+u_\eta\psi_{xy}\\ u_{yy}=u_{\xi\xi}\phi_y^2+u_{\eta\eta}\psi_y^2+2u_{\xi\eta}\phi_y\psi_y+u_\xi\phi_{yy}+u_\eta\psi_{yy}\end{cases}$

对于 $au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}$ 部分, 有: $au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}=Au_{\xi\xi}+2Bu_{\xi\eta}+Cu_{\eta\eta}+...$

其中: $\begin{cases}A=a\phi_x^2+2b\phi_x\phi_y+c\phi_y^2\\ B=a\phi_x\psi_y+b\left(\phi_x\psi_y+\phi_y\psi_x\right)+c\phi_y\psi_y\\ C=a\psi_x^2+2b\psi_x\psi_y+c\psi_y^2\end{cases}$

新方程有判别式 $B^2-AC=\left(b^2-ac\right)\left(\phi_x\psi_y-\phi_y\psi_x\right)^2=\left(b^2-ac\right)\begin{vmatrix}\phi_x & \phi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}^2=\left(b^2-ac\right)\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)}\right|^2$

注意: 变换的 Jacobi 行列式 $\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)}\right|=\phi_x\psi_y-\phi_y\psi_x\neq 0$, 即 $\frac{\phi_x}{\phi_y}\neq\frac{\psi_x}{\psi_y}$.

1. 对于双曲型方程, 有 $b^2-ac>0$. 取标准形式 $u_{\xi\eta}+...=0$, $A=C=0$.

   即 $\begin{cases}a\phi_x^2+2b\phi_x\phi_y+c\phi_y^2=0\\ a\psi_x^2+2b\psi_x\psi_y+c\psi_y^2=0\end{cases}$, 解为 $\begin{cases}\phi_x=\lambda_1\phi_y\\ \psi_x=\lambda_2\psi_y\end{cases}$, 其中 λ_1 和 λ_2 为方程的特征值.

   以上方程有特征线 $l_1:\begin{cases}\frac{dx}{dt}=1\\ \frac{dy}{dt}=-\lambda_1\end{cases}$ 和 $l_2:\begin{cases}\frac{dx}{dt}=1\\ \frac{dy}{dt}=-\lambda_2\end{cases}$, 即: $\begin{cases}\frac{dy}{dx}+\lambda_1=0\\ \frac{dy}{dx}+\lambda_2=0\end{cases}$

   联立方程和特征线消去特征值, 得: $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=-\frac{\phi_x}{\phi_y}\\ \frac{dy}{dx}=-\frac{\psi_x}{\psi_y}\end{cases}$.

   带入原方程消去 ϕ 和 ψ 项: $a(dy)^2-2bdxdy+c(dx)^2=0$, 解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$

   由于 $b^2-ac>0$, 所以双曲型方程具有两簇实特征线.

2. 对于抛物型方程, 有 $b^2-ac=0$. 取标准形式 $u_{\xi\xi}+...=0$, $B=C=0$.

   即 $\begin{cases}a\phi_x\psi_x+b(\phi_x\psi_y+\phi_y\psi_x)+c\phi_y\psi_y=0\\ a\psi_x^2+2b\psi_x\psi_y+c\psi_y^2=0\end{cases}$, 解为 $\psi_x=-\frac{b}{a}\psi_y$, 此解使另一方程恒成立. 因此可以取 $\lambda_1=\lambda_2=-\frac{b}{a}$. 因此, 抛物型方程有一个实根和一簇特征线.

3. 对于椭圆型方程, 有 $b^2-ac<0$. 没有实数根.

[**矩阵的特征值与特征矢量**] 对于 n 阶方阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$ 和 n 维非零列矢量 $\vec{\alpha}=(a_1,a_2,...,a_n)^\tau$. 如果有一个数 λ, 使得 $A\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}$. 则称 λ 为矩阵 A 的特征值 (特征根), $\vec{\alpha}$ 为矩阵 A 的特征值 λ 所对应的特征矢量. 矩阵 A 的特征值中绝对值最大的称为 A 的第一特征值.

[**二阶偏微分方程的特征方程**] 考虑二阶偏微分方程 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\vec{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+F\left(x_1,...,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0$, 其中 $a_{ij}(\vec{x})=a_{ij}(x_1,x_2,...,x_n)$ 为 $x_1,x_2,...,x_n$ 的已知函数. 代数方程 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j=0$ 是其特征方程. 这里 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 是某些参数, 有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2\neq 0$.

[**二阶偏微分方程的特征方向**] 如果点 $x^\circ=(x_1^\circ,x_2^\circ,...,x_n^\circ)$ 满足特征方程, 即 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^\circ)\alpha_i\alpha_j=0$. 则过 x° 的平面 $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k(x_k-x_k^\circ)=0$ 的法线方向 $l:(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ 称为二阶方程的特征方向.

[**二阶偏微分方程的特征曲面**] 如果一个 $(n-1)$ 维曲面, 其每点的法线方向都是特征方向, 则称此曲面为特征曲面.

特征平面: 过一点的 $(n-1)$ 维平面, 如其法线方向为特征方向, 则称这个平面为特征平面;

特征锥面: 在特征平面上的点上, 由特征平面的包络组成的锥面称为特征锥面.

[**含有 n 个自变量的二阶偏微分方程**] $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+H=0$, 其中 H 可以是 u 和 $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ 的函数, 系数 a_{ij} 可以是自变量的函数. 该方程可以根据矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的特征值分类.

抛物型: 若有零特征值 (即 A 退化), 这时有 m 个特征曲面 $(1\leq m<n)$;

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+H=0, 0<m<n$$

椭圆型: 若所有特征值不为零且同号 (即 A 为正定或负定), 这时不存在实特征曲面;

$$\sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+H=0, 0<m<n$$

双曲型: 若所有特征值不为零且除一个特征值外所有特征值同号 (即 A 不退化也不正定或负定), 这时有 n 个特征曲面;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+H=0$$

超双曲型: 若所有特征值不为零, 且至少有两个特征值为正, 两个特征值为负.

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\sum_{i=m+1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+H=0, 1<m\leq n-2$$

[**方程组**] n 个未知函数和 m 个自变量的一阶偏微分方程组可记为 $\sum\limits_{k=1}^{m} A^k \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} = \vec{E}$, 其中 $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)^T$ 为未知函数向量, $\vec{E} = (E_1, E_2, ..., E_n)^T$ 为右端项向量, $A^k = \left(a_{ij}^k\right)_{n\times m}$ 为系数矩阵.

[**方程组的特征方程**] 行列式 $det\left(\sum\limits_{k=1}^{m} A^k \lambda_k\right) = 0$ 是方程组 $\sum\limits_{k=1}^{m} A^k \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_k} = \vec{E}$ 的特征方程. 其中 $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ 是特征面的法向量 (或特征线的法线).

[**方程组的分类**] 偏微分方程组根据特征方程的 n 个根 (特征值) 可以作以下分类.

双曲型: 有 n 个不同的特征值 $\lambda_k (k = 1, 2, ..., n)$ 且都是实根;

抛物型: 至多有 $n-1$ 个不同的实根且没有复数根;

椭圆型: 没有实根 (或有复数根出现).

[**定解问题**] 微分方程与定解条件一起构成定解问题.

定解条件: 初始条件, 边界条件;

定解问题分类:;

初值问题 (Cauchy 问题): 只有初始条件而没有边界条件的问题;

边值问题: 只有边值条件而没有初值条件的问题;

混合问题 (初边值问题): 既有初始条件也有边界条件的定解问题.

[**边界条件**] 边界条件形如 $\alpha(x,y)u(x,y) + \beta(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = \gamma(x,y)$, 其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为边界条件的外法向导数.

Dirichlet(第一类) 条件: $\beta = 0$, 即 u 给定;

Neumann(第二类) 条件: $\alpha = 0$, 即 u 的外法向导数给定;

Robbins(第三类) 条件: $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$;

Cauchy 条件: 有两个方程, 在一个方程中, $\beta = 0$(u 给定); 在另一个方程中, $\alpha = 0$(u 的外法向导数给定).

通常: 双曲型方程关联 Cauchy 条件; 抛物型方程关联 Dirichlet 或 Neumann 条件; 椭圆型方程关联 Dirichlet 或 Neumann 条件.

[**常见三类方程定解问题的性质**]

描述的问题	**方程类型**	**方程形式**	**定解条件**	**求解区域**	**解的光滑性**
平衡问题	椭圆型	$div(gradu) = 0$	边界条件	闭区域	解恒光滑
与耗散有关的问题	抛物型	$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha div(gradu)$	初边值条件	开区域	解横光滑
与耗散无关的问题	双曲型	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \alpha div(gradu)$	初边值问题	开区域	解可以不连续

2. 矩阵的基本概念

[**线性代数方程的矩阵形式**] 线性代数方程组 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1, 2, ..., n$, 可以写成矩阵形式 $A\vec{x} = \vec{b}$. 其中: A 是 n 阶方阵, 元素为 $a_{ij}(i, j = 1, 2, ..., n)$, 是实数. 向量 $\vec{x}$ 和 $\vec{b}$ 均为 n 维列向量.

[**矩阵的运算记号**] 对于 n 阶方阵 A, 有以下运算:

A 的逆: A^{-1}; A 的转置: A^T; A 的行列式: $|A|$ 或记为 $det(A)$.

[**置换矩阵**] 矩阵的元素仅为 0 和 1, 且每行和每列仅有一个非零元素. 记为 Π.

[**特殊的矩阵**]

非奇异矩阵: $|A| \neq 0$; 对称矩阵: $A = A^T$; 正交矩阵: $A^{-1} = A^T$;

零矩阵: $a_{ij} = 0(i, j = 1, 2, ..., n)$; 对角矩阵: $a_{ij} = 0(i \neq j)$;

对角占优: $\forall i \in [1, n], |a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$; 严格对角占优: $\forall i \in [1, n], |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$;

三对角矩阵: $a_{ij} = 0, |i - j| > 1$; 上三角矩阵: $a_{ij} = 0, (i > j)$; 下三角矩阵: $a_{ij} = 0, (i < j)$;

Hermite 矩阵: $A = A^H$, (H 表示复共轭转置); 酉矩阵 (幺正矩阵): $AA^H = A^H A = I$;

正规矩阵: $AA^H = A^H A$. 对角矩阵, 实对角矩阵, 正交矩阵, Hermite 矩阵, 酉矩阵都是正规矩阵.

[**矩阵不可约**] 若不存在置换变换 $\Pi A \Pi^{-1}$, 使得 A 简化为 $\begin{pmatrix} P & O \\ R & Q \end{pmatrix}$, 其中 P 和 Q 分别为 p 阶和 q 阶方阵, $p + q = n$, O 是 $p \times q$ 零矩阵, 则称矩阵 A 不可约.

[**块对角矩阵**] 若 $A = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & ... & \\ & & & B_S \end{pmatrix}$, 其中 $B_k(k = 1, 2, ..., s)$ 是方阵 (阶数不必相等), 则称 A 为块对角矩阵.

[**相似**] 相似矩阵的行列式相等.

[**相似变换**] 两个矩阵 A 和 B 相似, 若对某非奇异矩阵 S, 有 $B = S^{-1}AS$. $S^{-1}AS$ 是 A 的相似变换.

[**酉相似**] 若存在酉矩阵 U, 使得 $U^H AU = U^{-1}AU = B$, 则称 A 酉相似于 B.

[**矩阵的特征方程与特征值**] A 的特征方程是 $|A - \lambda I| = 0$. A 的特征值是特征方程的根 $\lambda_i(i = 1, 2, ..., n)$. 通常特征向量指右特征向量.

右特征向量: 对每个 λ_i, 右特征向量 $\vec{x}^{(i)}$ 由 $A\vec{x}^{(i)} = \lambda_i \vec{x}^{(i)}, \vec{x}^{(i)} \neq 0$ 给出.

左特征向量: 对每个 λ_i, 左特征向量 $\vec{y}^{(i)}$ 由 $\vec{y}^{(i)T} A = \lambda_i \vec{y}^{(i)T}$ 或 $A^T \vec{y}^{(i)} = \lambda_i \vec{y}^{(i)}$, $\vec{y}^{(i)} \neq 0$ 给出. 在复数域, 则由 $\vec{y}^{(i)H} A = \lambda_i \vec{y}^{(i)H}$ 给出.

3. 矩阵的重要性质与定理

[**Jordan 子矩阵 (Jordan 块)**] A 的 Jordan 子矩阵 (Jordan 块) 是如 $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & ... & ... & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$ 的矩阵形式, 其中 λ_i 是 A 的特征值.

[**Jordan 标准形**] A 的 Jordan 标准形是由 Jordan 块构成的分块对角矩阵, 它是唯一的块排列方式. 任何矩阵 A 可以通过相似变换 S 被简化成 Jordan 标准形 $J = S^{-1}AS$, 其中 J 的对角元是 A 的特征值.

若 A 有 n 个相异的特征值, 则它的 Jordan 标准型是对角形式, 且它的 n 个特征向量是线性无关的, 它们形成一个完备的特征向量系并张成 n 维空间.

若 A 没有 n 个相异的特征值, 可以有或没有 n 个无关的特征向量.

若两个矩阵 A 和 B 可交换, 并有对角 Jordan 形式, 则它们有一个完全的联合特征向量.

[**n 阶对称矩阵的性质**] n 阶对称矩阵 A 有 $A = A^T$, A 有:

一个对角 Jordan 标准形;

n 个实特征值;

n 个相互正交的特征向量;

若 A 和 B 是对称的, 且 $AB = BA$, 则 AB 是对称的.

[**复向量的内积**] 对于 n 维复向量 $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ 和 $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, 内积 $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$, 其中 $\bar{y}_i$ 是 y_i 的复共轭.

对任意 n 阶复矩阵 A, 有 $(\vec{x}, A\vec{y}) = (A^H \vec{x}, \vec{y})$ 成立.

[**正定矩阵**]

若 A 是实矩阵, $\vec{x}$ 是复向量, 则当 $(\vec{x}, A\vec{y}) > 0$ 对所有的 $\vec{x} \neq \vec{0}$ 成立时, A 是正定的. 此时, A 是对称的. 其中 $(\vec{x}, A\vec{x})$ 是实数.

若 A 是实矩阵, $\vec{x}$ 是复向量, 则当 $(\vec{x}, A\vec{x}) > 0)$ 对所有 $\vec{x} \neq \vec{0}$ 成立时, A 正定. 但 A 不一定对称.

若 $(\vec{x}, A\vec{x}) \geq 0$ 其中等号至少对一个 $\vec{x} \neq \vec{0}$ 成立, 则 A 半正定.

[**三对角矩阵的特征值**] 若 A 是一个 N 阶三对角矩阵 $\begin{pmatrix} a & b & & \\ c & a & ... & \\ & ... & ... & b \\ & & c & a \end{pmatrix}_{N\times N}$, 其中 a,b,c 是实数, $bc>0$, 则:

A 的右特征值为 $\lambda_s = a + 2b\sqrt{\frac{c}{b}}\cos\frac{s\pi}{N+1}, s=1,2,...,N$, 对应的右特征向量为 $\vec{x}_s = (x_j)_s = \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{j}{2}}\sin\frac{js\pi}{N+1}, j,s = 1,2,...,N$. 右特征向量构成右特征矩阵的列 $(s=1,...,N)$, 矩阵元素为 $X = (x_{js}) = \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{j}{2}}\sin\frac{js\pi}{N+1}, j,s=1,2,...,N$.

A 的左特征值为 $\gamma_s = a + 2c\sqrt{\frac{b}{c}}\cos\frac{s\pi}{N+1}, s=1,2,...,N$, 对应的左特征向量为 $\vec{y}_s = (y_j)_s = \frac{2}{N+1}\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{j}{2}}\sin\frac{js\pi}{N+1}, j,s = 1,2,...,N$. 左特征向量构成左特征矩阵的行 $(s=1,...,N)$, 矩阵元素为 $Y = X^{-1} = (y_{sj}) = \frac{2}{N+1}\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{j}{2}}\sin\frac{js\pi}{N+1}, j,s=1,2,...,N$.

[**特殊三对角矩阵的特征值**]

三对角矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & ... & ... & ... & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}_{N\times N}$ 的特征值为 $\lambda_s = 2 - 2\cos\frac{(2s-1)\pi}{2N+1}, s=1,...,N$, 特征向量为 $\vec{x}_j = \cos\frac{(2s-1)\pi\hat{x}_j}{2}, \hat{x}_j = \frac{2j-1}{2N+1}, j,s=1,...,N$.

三对角矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & -2 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & ... & ... & ... & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}_{N\times N}$ 的特征值为 $\lambda_s = 2 - 2\cos\frac{(2s-1)\pi}{2N}, s=1,...,N$, 特征向量为 $\vec{x}_j = \cos\frac{(2s-1)\pi\hat{x}_j}{2}, \hat{x}_j = \frac{j-1}{N}, j,s=1,...,N$.

三对角矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & -2 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & ... & ... & ... & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -2 & 2 \end{pmatrix}_{N\times N}$ 的特征值为 $\lambda_s = 2-2\cos\frac{s\pi}{N-1}, s=0,1,...,N-1$, 特征向量为 $\vec{x}_s = \cos(s\pi\hat{x}_j), \hat{x}_j = \frac{j-1}{N-1}, j=1,...,N; s=0,1,...,N-1$.

[**Gerschgorin 圆盘定理**] 矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的特征值位于复平面上 n 个圆盘的并集中 $|\lambda - a_{ss}| \leq \sum\limits_{j=1, j\neq s}^{n} |a_{sj}|, s = 1, 2, ..., n$.

注意: Gerschgorin 圆盘定理只给出了特征值所在的范围, 但并不说明每个圆中都有特征值.

[**谱半径**] 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 特征值为 $\lambda_i (1 \leq i \leq n)$, 则称 $\rho(A) = \max\limits_i |\lambda_i|$ 为矩阵 A 的谱半径.

一般, $\rho(A)$ 是复平面内中心在原点, 包含 A 的所有特征值的最小圆盘的半径.

由 Gerschgorin 定理, $\rho(A) \leq \min\left(\max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|; \max\limits_j \sum\limits_i |a_i j|\right)$.

[**Taussky 定理**] 设矩阵 $A \in (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是严格对角占优矩阵, 则 A 非奇异.

TODO

原书 21 页内容略过, 下页内容从 28 页开始.

4. 向量和矩阵的范数

[**范数**] 向量 $\vec{x}$ 的范数 (或模)$||\vec{x}||$ 是一个非负实数, 满足下列性质:

正定性: $||\vec{x}|| > 0, \vec{x} \neq \vec{0}$; 齐次性: $||c\vec{x}|| = |c|||x||$, c 为任何复数;

三角不等式: $||\vec{x} + \vec{y}|| \geq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$.

[$p-$ **范数**] $||\vec{x}||_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + ... + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, p = 1, 2, ..., \infty$, 其中 $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$.

常见简单 $p-$ 范数: 1-范数, 2-范数 (Euclid 范数), $\infty-$ 范数.

[$\infty-$ **范数**] $||\vec{x}||_\infty = \max\limits_i |x_i|$.

[**矩阵范数**] 矩阵的范数是一个非负实数, 满足下列性质:

正定性: $||A|| > 0$, 若 $A \neq 0$; 齐次性: $||cA|| = |c|||A||$, c 为任何复数;

三角不等式: $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$; 相容性: $||AB|| \leq ||A||||B||$.

注意, 虽然向量的 $1-$ 范数推广到矩阵范数满足上述条件, 但并非所有的 $p-$ 范数 (含 $\infty-$ 范数) 都能推广到矩阵范数.

[**Frobenius 范数 (Euclid 范数)**] 对于复数域上的 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 的 Frobenius 范数为 $||A||_F = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. 该范数是向量范数的推广.

[**向量范数与矩阵范数的相容性**] 如果 $||A||$ 与 $|\vec{x}||$ 满足 $||A\vec{x}|| \leq ||A||||\vec{x}||, \vec{x} \neq \vec{0}$, 则称矩阵范数 $||A||$ 与向量范数 $||\vec{x}||$ 相容.

[**矩阵诱导 $p-$ 范数**] 由向量 $p-$ 范数 $||\vec{x}||_p$ 所诱导的矩阵范数称为矩阵诱导 $p-$ 范数 $||A||_p = \sup\limits_{||\vec{x}||_p \neq 0} \frac{||A\vec{x}||_p}{||\vec{x}||_p} = \sup\limits_{||\vec{x}||_p = 1} ||A\vec{x}||_p, 1 \leq p \leq \infty$.

该式表示当 $\vec{x}$ 在模 $||\cdot||_p$ 为 1 的向量集上变化时, 矩阵 A 的模是向量 $A\vec{x}$ 模的上确界.

[**常见简单矩阵诱导 $p-$ 范数**]

列和范数 $(p = 1)$: $||A||_1 = \sup\limits_{||\vec{x}||_1 = 1} ||A\vec{x}||_1 = \max\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}|$;

谱范数 $(p = 2)$: $||A||_2 = \sup\limits_{||\vec{x}||_2 = 1} ||A\vec{x}||_2 = \sqrt{\rho(A^H A)} = \sqrt{\lambda_{max}(A^H A)}$, 其中 $\lambda_{max}(A^H A)$ 表示矩阵 $A^H A$ 特征值的最大值, 即 $||A||_2$ 是 A 的最大特征值.

行和范数 $(p = \infty)$: $||A||_\infty = \sup\limits_{||\vec{x}||_\infty = 1} ||A\vec{x}||_\infty = \max\limits_i \sum\limits_j |a_i j|$. $||A||_1 = ||A^T||_\infty$.

TODO

原书 30 页内容略过, 下页内容从 37 页开始.

5. 常用定理

[**实系数多项式的根的绝对值不超过** 1]

定理 1: 实系数二次方程 $x^2-bx-c=0$ 的两根按模不大于 1 且其中至少有一根按模严格小于 1 的充要条件是 $|b|<1-c, |c|<1$. 条件也可写为 $|b|\le 1-c<2$.

定理 2: 实系数二次方程 $x^2-bx-c=0$ 的两根按模不大于 1 的充要条件是 $|b|\le 1-c, |c|\le 1$. 条件也可写为 $|b|\le 1-c\le 2$.

[**插值数值积分公式**] 设 $f(x)$ 为有限区间 $[a,b]$ 上的可积函数, 要近似计算 $\int_a^b f(x)dx$. 其插值求积公式为 $I_n(f)=\sum\limits_{i=1}^{n+1} A_i f(x_i)$, 其中 $A_i=\int_a^b l_i(x)dx, i=1,...,n+1$, $l_i(x)=\frac{w_{n+1}(x)}{(x-x_i)w'_{n+1}(x_i)}, i=1,...,n+1$, $w_{n+1}=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_{n+1})$.

对于有 $n+1$ 阶连续导数的 $f(x)$, 离散误差为 $E_n(f)=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w_{n+1}(x)dx$.

[**Newton-Cotes 型求积公式**] 若插值求积公式的结点为等距结点 $h=x_{i+1}-x_i=\frac{b-a}{n}$, 则称为 n 阶 Newton-Cotes 型求积公式, A_i 称为 Cotes 系数. 此时 $x=a+th$, $A_i=(-1)^{n+1-i}\frac{h}{(i-1)!(n+1-i)!}\int_0^n t(t-1)...(t-n)dt, i=1,...,n+1$.

当 n 为偶数时, 离散误差为: $E_n(f)=\frac{h^{n+3}f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}\int_0^n t^2(t-1)...(t-n)dt, \eta\in(a,b)$;

当 n 为奇数时, 离散误差为 $E_n(f)=\frac{h^{n+2}f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\int_0^n t(t-1)...(t-n)dt, \eta\in(a,b)$

[**梯形公式**] 当插值求积公式的 $n=1$ 时, 有两个结点 $x_1=a, x_2=b$, 此时 $A_1=(-1)(b-a)\int_0^1(t-1)dt=\frac{b-a}{2}$, $A_2=(b-a)\int_0^1 tdt=\frac{b-a}{2}$. $I_1(f)=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$.

梯形公式的离散误差为 $E_1(f)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi), \xi\in(a,b)$.

[**Green 公式**] 设 Ω 是平面中具有分段光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界开区域, $u,v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$, 则 $\iint\limits_{\Omega} u\Delta v dxdy=\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n}ds-\iint\limits_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v dxdy$, $\iint\limits_{\Omega}(u\Delta v-v\Delta u)dxdy=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$, 其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 表示函数 u 在 $\partial\Omega$ 上沿外法向 n 的导数, Δ 为 Laplace 算子, ∇ 为梯度算子. 前者被称为第一 Green 公式, 后者被称为第二 Green 公式.