2022 年 10 月 21 日: 波的偏振

1. 矢量波

[**单色平面波**] 假设电磁波沿 $\vec{e}_z$ 方向传播, 其沿 $\vec{e}_x$ 和 $\vec{e}_y$ 方向的电场 (或磁场) 分量只允许有相位 φ 不同.

否则合成的电场 (或磁场) 强度将存在两个频率分量.

[**椭圆的一般方程**] 在笛卡尔坐标系下, 曲线 $AX^2+BXY+CY^2+DX+EY+F=0$ 若满足 $B^2<4AC$, 则该曲线表示一个椭圆, 称为椭圆的一般方程.

[**椭圆判别式**] 对于一般椭圆方程 $AX^2+BXY+CY^2+DX+EY+F=0, B^2<4AC$, 行列式 Δ 定义为 $\Delta=\begin{bmatrix} A & \frac{1}{2}B & \frac{1}{2}D \\ \frac{1}{2}B & C & \frac{1}{2}E \\ \frac{1}{2}D & \frac{1}{2}E & F \end{bmatrix}$. 椭圆的判别式为 $C\Delta$.

如果 $C\Delta<0$, 则椭圆为实椭圆;

如果 $C\Delta>0$, 则椭圆为一个虚椭圆;

如果 $C\Delta=0$, 则椭圆缩小为一个点.

[**椭圆的规范方程**] 方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 被称为椭圆的规范方程.

规范方程到一般方程的变换关系 $\begin{cases} A=a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta \\ B=2(b^2-a^2)\sin\theta\cos\theta \\ C=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta \\ D=-2Ax_0-By_0 \\ E=-Bx_0-2Cy_0 \\ F=Ax_0^2+Bx_0y_0+Cy_0^2-a^2b^2 \end{cases}$.

一般方程到规范方程的变换关系 $\begin{cases} a,b=\frac{-\sqrt{2(AE^2+CD^2-BDE+(B^2-4AC)F)((A+C)\pm\sqrt{(A-C)^2+B^2})}}{B^2-4AC} \\ x_0=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC} \\ y_0=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC} \\ \theta=\begin{cases} arctg\left(\frac{1}{B}(C-A-\sqrt{(A-C)^2+B^2})\right), B\neq 0 \\ 0, B=0, A<C \\ \frac{\pi}{2}, B=0, A>C \end{cases} \end{cases}$

上式中坐标 (x,y) 均来自 $\begin{cases} x=(X-x_0)\cos\theta+(Y-y_0)\sin\theta \\ y=-(X-x_0)\sin\theta+(Y-y_0)\cos\theta \end{cases}$, 表示 (x,y) 经过平移 (x_0,y_0) 并绕 (x_0,y_0) 旋转 θ.

[**椭圆偏振波**]

因为磁场与电场满足 $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, 所以对于单色波磁场与电场具有相似形式. 这里只需要讨论电场即可进一步求出磁场表达式.

对于单色平面波, 不妨设 $\vec{E}$ 的两个垂直于传播方向 $\vec{e}_z$ 的分量为 $\begin{cases}E_x=E_{x0}e^{i(kz-\omega t+\varphi_x)}\\E_y=E_{y0}e^{i(kz-\omega t+\varphi_y)}\end{cases}$,

即 $\vec{E}=E_{x0}e^{i(kz-\omega t+\varphi_x)}\vec{e}_x+E_{y0}e^{i(kz-\omega t+\varphi_y)}\vec{e}_y$.

考虑物理意义, 只取实部 $\vec{E}=E_1\cos{(kz-\omega t+\varphi_x)}\vec{e}_x+E_2\cos{(kz-\omega t+\varphi_y)}\vec{e}_y$. 为了简便, 记 E_{x0},E_{y0} 为 E_1,E_2.

对于给定点 (z,t), 相位 $\tau(z,t)=kz-\omega t+\varphi$. 设两电场分量相位表达式中相同的部分 $kz-\omega t+\varphi_0=\tau_0(z,t)$, 不同的部分 $\Delta\varphi=\varphi_y-\varphi_x$, 得 $\vec{E}=E_1\cos{(\tau_0)}\vec{e}_x+E_2\cos{(\tau_0+\Delta\varphi)}\vec{e}_y$.

提取相位部分, 得到 $\begin{cases}\frac{E_x}{E_1}=\cos(\tau_0)\\\frac{E_y}{E_2}=\cos(\tau_0+\Delta\varphi)=\cos(\tau_0)\cos(\Delta\varphi)-\sin(\tau_0)\sin(\Delta\varphi)\end{cases}$.

由 $\sin^2\tau_0+\cos^2\tau_0=1$ 消去含 τ_0 的项得 $\frac{E_y}{E_2}=\frac{E_x}{E_1}\cos(\Delta\varphi)\pm\sqrt{1-\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2}\sin(\Delta\varphi)$.

提取含有根式的项得 $\pm\sqrt{1-\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2}\sin(\Delta\varphi)=\frac{E_y}{E_2}-\frac{E_x}{E_1}\cos(\Delta\varphi)$.

两边同时取二次方得 $\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2-2\frac{E_xE_y}{E_1E_2}\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi$.

或 $E_2^2E_x^2+E_1^2E_y^2-2E_1E_2\cos\Delta\varphi E_xE_y-E_1^2E_2^2\sin^2\Delta\varphi=0$

因为 $2^2\cos^2\Delta\varphi-4=4(\cos^2\Delta\varphi-2)$ 且 $\cos^2\Delta\varphi\in[0,1]$, 所以该表达式描述的点 (E_x,E_y) 在一个椭圆上.

对比椭圆的一般方程, 有 $A=E_2^2,B=-2E_1E_2\cos\Delta\varphi,C=E_1^2,D=E=0,F=-E_1^2E_2^2\sin^2\Delta\varphi$.

由变换关系变换到规范方程有关系 $\begin{cases}\theta=arctg\left(\frac{E_2^2-E_1^2+K}{2E_1E_2\cos\Delta\varphi}\right)\\a^2,b^2=\frac{1}{2}(E_1^2+E_2^2\pm K)\\x_0,y_0=0\end{cases}$.

其中 $K=\sqrt{E_1^4+E_2^4+2E_1^2E_2^2\cos^2\Delta\varphi}$.

如果设 $\delta=\Delta\varphi,E_x=X,E_y=Y,E_\xi=x,E_\eta=y,\theta=\psi,E_a=a,E_b=b,\delta_1=\varphi_x,\delta_2=\varphi_y,\tau=\tau_0-\varphi$, 即得书上的表达式:

$$\begin{cases}E_\xi=E_x\cos\psi+E_y\sin\psi=E_a\cos(\tau+\delta_2-\delta_1)\\E_\eta=-E_x\sin\psi+E_y\cos\psi=E_b\sin(\tau+\delta_2-\delta_1)\end{cases},\begin{cases}E_x=E_1\cos(\tau+\delta_1)\\E_y=E_2\cos(\tau+\delta_2)\end{cases}.$$

[**椭圆偏振波的能流矢量**] 真空中, $\left|\vec{S}\right| = \left|\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0^2\vec{e}_k\right| \propto E_0^2 = E_1^2 + E_2^2 = E_a^2 + E_b^2$. 因为 $\psi =< E_a, E_x >=< E_b, E_y >$ 是任意的, 所以椭圆偏振波的能流矢量大小总是正比于两个相互正交方向上的分量的平方和.

使用 CGS 高斯单位制时, $S = E_0^2 = E_1^2 + E_2^2 = E_a^2 + E_b^2$.

由 $\begin{cases} E_\xi = E_x\cos\psi + E_y\sin\psi = E_a\cos(\tau+\delta_2-\delta_1) \\ E_\eta = -E_x\sin\psi + E_y\cos\psi = E_b\sin(\tau+\delta_2-\delta_1) \end{cases}, \begin{cases} E_x = E_1\cos(\tau+\delta_1) \\ E_y = E_2\cos(\tau+\delta_2) \end{cases}$

$$得:\begin{cases} E_1\cos(\tau+\delta_1)\cos\psi + E_2\cos(\tau+\delta_2)\sin\psi = E_a\cos(\tau+\delta_2-\delta_1) \\ -E_1\cos(\tau+\delta_1)\sin\psi + E_2\cos(\tau+\delta_2)\cos\psi = E_b\sin(\tau+\delta_2-\delta_1) \end{cases}.$$

TODO

消去 τ, ψ.

得到 $E_a^2 + E_b^2 = E_1^2 + E_2^2$.

[**偏振方向**] 偏振方向定义为沿传播方向, 电场的旋转方向, 由电场分量的相位差 $\Delta\varphi$ 确定.

对于空间直角坐标系中沿 $\vec{e}_z$ 方向传播的电磁波, 如果 E_x 相位先于 E_y(即 $\sin\Delta\varphi < 0$), 则经过 t 时间后在位置 z 的 $< \vec{E}, \vec{e}_x >$ 大于原点处的 $< \vec{E}, \vec{e}_x >$. 电场沿传播方向呈左手螺旋. 反之.

[**线偏振**] 椭圆方程 $E_2^2E_x^2 + E_1^2E_y^2 - 2E_1E_2\cos\delta E_xE_y - E_1^2E_2^2\sin^2\delta = 0$ 当 $\delta = m\pi, m \in Z$ 时, 退化为直线方程 $E_1 = E_2$. 单色波电场强度 $E = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\sqrt{E_x^2+E_y^2}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{E_1^2+E_2^2} = E_1 = E_2$.

[**圆偏振**] 椭圆方程 $E_2^2E_x^2 + E_1^2E_y^2 - 2E_1E_2\cos\delta E_xE_y - E_1^2E_2^2\sin^2\delta = 0$ 当 $\delta = (m+1)\frac{\pi}{2}, m \in Z$ 时, 退化为圆方程 $E_2^2E_x^2 + E_1^2E_y^2 = E_1^2E_2^2$.

椭圆偏振的本轮均轮形式: 将椭圆分解为旋转方向相反的本轮-均轮系统, 并用 E_r 和 E_l 分别表示其中左旋和右旋的部分. 引入变换 $E_r = \frac{1}{2}(E_a + E_b)$ 和 $E_l = \frac{1}{2}(E_a - E_b)$ 即将椭圆偏振分解为两个旋转方向相反的圆偏振.

2. 偏振的矢量描述

[**椭圆偏振波中的独立变量**] 椭圆偏振波中的独立参量应包括一组正交的电场分量和一个描述它们相位差的量.

[**单色波偏振的参量**] 由 $\tau \in (-\infty, +\infty)$, 取 $\tau = 0$ 和 $\tau = \frac{\pi}{2}$. 有以下结论:

1.$E_a E_b = E_1 E_2 \sin\delta$.

2. 定义 $\tan\alpha = \frac{E_1}{E_2}$, 则 $\tan 2\psi = -\tan(2\alpha)\cos\delta$.

3. 定义 $\tan\chi = \frac{E_a}{E_b}$, 则 $\sin 2\chi = \sin 2\alpha \sin\delta$.

在 $\tau = 0$ 和 $\tau = \frac{\pi}{2}$ 时, 方程 $\begin{cases} E_1\cos(\tau+\delta_1)\cos\psi + E_2\cos(\tau+\delta_2)\sin\psi = E_a\cos(\tau+\delta_2-\delta_1) \\ -E_1\cos(\tau+\delta_1)\sin\psi + E_2\cos(\tau+\delta_2)\cos\psi = E_b\sin(\tau+\delta_2-\delta_1) \end{cases}$.

$$
\text{变为}\begin{cases} E_1\cos\delta_1\cos\psi + E_2\cos\delta_2\sin\psi = E_a\cos\delta ...(0) \\ -E_1\cos\delta_1\sin\psi + E_2\cos\delta_2\cos\psi = E_b\sin\delta ...(1) \\ E_1\sin\delta_1\cos\psi + E_2\sin\delta_2\sin\psi = E_a\sin\delta ...(2) \\ E_1\sin\delta_1\sin\psi - E_2\sin\delta_2\cos\psi = E_b\cos\delta ...(3) \end{cases}
$$

推导 1: (0)*(3)-(1)*(4), 见 mxm1.wxm 中的 Sol1.

推导 2: (0)/(2)+(1)/(3), 见 mxm1.wxm 中的 Sol2.

推导 3: 联立 $E_1^2 + E_2^2 = E_a^2 + E_b^2$ 和 $E_a E_b = E_1 E_2 \sin\delta$.

[**Poincaré 球**] 球坐标系 $\vec{e}_S, \vec{e}_{2\psi}, \vec{e}_{\frac{\pi}{2}-2\chi}$.

1.$\vec{e}_{\frac{\pi}{2}-2\chi}$ 分量为 $\frac{\pi}{2}$(位于球面的赤道上): 即 $\chi = 0$, 电场在任意坐标系中 E_1, E_2 不总为 0, 则 $\delta = 0$. 偏振方式为线偏振.

2.$\vec{e}_{\frac{\pi}{2}-2\chi}$ 分量为 0(位于球面的北极点): 即 $\chi = \frac{\pi}{4}$, $E_a = E_b$, 偏振方式为右旋圆偏振.

3.$\vec{e}_{\frac{\pi}{2}-2\chi}$ 分量为 π(位于球面的南极点): 即 $\chi = -\frac{\pi}{4}$, $|E_a| = |E_b|$, 偏振方式为左旋圆偏振.

由 $E_a = E_b\tan\chi, E_1 = E_2\tan\alpha$ 代入 $E_a E_b = E_1 E_2 \sin\delta$ 得: $\frac{E_b^2}{E_2^2}\frac{\tan\chi}{\tan\alpha} = \sin\delta$, 且 $E_1 > 0, E_2 \geq 0 \Rightarrow \tan\alpha \geq 0$ 得: $sign(\tan\chi) = sign(\sin\delta)$.

[**Stokes 参量**] 与庞加莱球坐标系的原点重合, 且 $\vec{e}_V$ 的方向为 $\chi = \frac{\pi}{4}$ 的直角坐标系 $\vec{e}_Q, \vec{e}_U, \vec{e}_V$, 其中 $\vec{e}_Q \times \vec{e}_U = \vec{e}_V$.

Stokes 参量的模记为 I, 即 $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$. 所以下面展示的 4 个 Stokes 参量只有 3 个是独立的.

Stokes 参量下的矢量 $\vec{r}_S$ 与 Poincaré 球下的 $\vec{r}_P$ 满足变换: $\begin{cases} S_0 = I = S \\ S_1 = Q = S\cos 2\chi\cos 2\psi \\ S_2 = U = S\cos 2\chi\sin 2\psi \\ S_3 = V = S\sin 2\chi \end{cases}$.

[Stokes 参量的 E_1, E_2, δ 表示] $\begin{cases} S_0 = I = E_1^2 + E_2^2 \\ S_1 = Q = E_1^2 - E_2^2 \\ S_2 = U = 2E_1E_2\cos\delta \\ S_3 = V = 2E_1E_2\sin\delta \end{cases}$.

由 $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ 和 $\tan\alpha = \frac{E_1}{E_2}$ 得: $\tan 2\alpha = \frac{2E_1E_2}{E_2^2-E_1^2}$.

由 $\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$ 得 $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$, 即 $\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2E_1E_2}{E_2^2-E_1^2}}} = \sqrt{\frac{(E_2^2-E_1^2)^2}{(E_2^2+E_1^2)^2}} = \frac{E_2^2-E_1^2}{E_2^2+E_1^2}$.

取正交的两个电场分量中较大的为 E_2.

由 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 得: $\sin 2\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{E_2^2-E_1^2}{E_2^2+E_1^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4E_1^2E_2^2}{E_2^4+E_1^4+2E_1^2E_2^2}} = \frac{2E_1E_2}{E_1^2+E_2^2}$.

由 $\tan 2\psi = -\tan 2\alpha\cos\delta$ 得: $\tan 2\psi = \frac{2E_1E_2}{E_1^2-E_2^2}\cos\delta$.

进一步, $\cos 2\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4E_1^2E_2^2}{(E_1^2-E_2^2)^2}\cos^2\delta}} = \frac{E_1^2-E_2^2}{\sqrt{(E_1^2+E_2^2)^2-4E_1^2E_2^2(1-\cos^2\delta)}} = \frac{E_1^2-E_2^2}{\sqrt{(E_1^2+E_2^2)^2-4E_1^2E_2^2\sin^2\delta}}$.

由 $I = E_1^2 + E_2^2$ 得: $\cos 2\psi = \frac{E_1^2-E_2^2}{\sqrt{I^2-4E_1^2E_2^2\sin^2\delta}}$.

进一步, $\sin 2\psi = \sqrt{1-\frac{(E_1^2-E_2^2)^2}{I^2-4E_1^2E_2^2\sin^2\delta}} = \frac{\sqrt{I^2-E_1^2-E_2^2+2E_1^2E_2^2-4E_1^2E_2^2\sin^2\delta}}{\sqrt{I^2-4E_1^2E_2^2\sin^2\delta}} = \frac{2E_1E_2\cos\delta}{\sqrt{I^2-4E_1^2E_2^2\sin^2\delta}}$.

由 $\sin 2\chi = \sin 2\alpha\sin\delta$, 得: $\sin 2\chi = \frac{2E_1E_2}{E_1^2+E_2^2}\sin\delta = \frac{2E_1E_2}{I}\sin\delta$.

进一步, $\cos 2\chi = \sqrt{1-\frac{4E_1^2E_2^2}{I^2}\sin^2\delta} = \frac{1}{I}\sqrt{I^2-4E_1^2E_2^2\sin^2\delta}$.

也可以表示为 $\cos 2\chi = \sqrt{(E_1^2-E_2^2)^2+4E_1^2E_2^2\cos^2\delta}$.

由 $S_0 = I = S$ 得: $S_0 = E_1^2 + E_2^2$.

由 $S_1 = Q = S\cos 2\chi\cos 2\psi$ 得: $Q = I\frac{1}{I}\sqrt{I^2-4E_1^2E_2^2\sin^2\delta}\frac{E_1^2-E_2^2}{\sqrt{I^2-4E_1^2E_2^2\sin^2\delta}} = E_1^2 - E_2^2$.

由 $S_2 = U = S\cos 2\chi\sin 2\psi$ 得: $U = I\frac{1}{I}\sqrt{I^2-4E_1^2E_2^2\sin^2\delta}\frac{2E_1E_2\cos\delta}{\sqrt{I^2-4E_1^2E_2^2\sin^2\delta}} = 2E_1E_2\cos\delta$.

由 $S_3 = V = S\sin 2\chi$, 得 $V = I\frac{2E_1E_2}{I}\sin\delta = 2E_1E_2\sin\delta$.

[Stokes 参量下的偏振特例]

1. 线偏振时, $\chi = 0$, 则 $Q = I\cos 2\psi, U = I\sin 2\psi, V = 0$.

2. 右旋圆偏振时, $\chi = \frac{\pi}{4}$, 则 $Q = 0, U = 0, V = I$.

3. 左旋圆偏振时, $\chi = -\frac{\pi}{4}$, 则 $Q = 0, U = 0, V = -I$.

3. 准单色波

[**正交函数空间**] 如果函数空间 $\{f_i\}, i \in N$, 中的所有函数在区间 $[T_1, T_2]$ 上满足 $\int_{T_1}^{T_2} f_i f_j dt = 0, i \neq j$, 则称函数空间 $\{f_i\}, i \in N$ 中的函数两两正交. 该函数空间被称为正交函数空间.

可以验证, 三角函数空间 $\{\sin(nt)\}, n \in N^*$ 和 $\{\cos(nt)\}, n \in N$ 是正交函数空间.

周期函数总可以在其周期内分解为正交函数的线性组合. 对函数进行周期延拓后分解到三角函数空间即 Fourier 变换.

[**连续 Fourier 变换**] $F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi t\nu} dt$.

其逆变换为 $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$.

[**解析信号**] 由频域表达式经过 Fourier 逆变换得到的时域信号的复数形式被称为解析信号, 其实部即实际测量的时域信号.

[**准单色波**] 如果关注信号的带宽 $\nu_B = \Delta\nu$ 远小于信号的中心频率 $\nu_c = \bar{\nu}$, 即满足 $\frac{\nu_B}{\nu_c} << 1$, 则称这个带宽为 ν_B 的信号相对中心频率 ν_c 是准单色波.

[**包络线和相位因子**] 对于一个准单色信号, 在时域上总可以视为幅度和相位受包络线 $A(t)$ 和相位因子 $\Phi(t)$ 调制的解析信号 $A(t)e^{i\Phi(t)}$.

对于解析信号 f, 包络线 $A(t) = \sqrt{Re(f)^2 + Im(f)^2} = \sqrt{ff^*} = |f|$, 相位因子 $\Phi(t) = arctg\frac{Im(f)}{Re(f)}$.

对于中心频率 $\nu_c = \bar{\nu}$ 的信号, 时域表达式变为 $f(t) = A(t)e^{i[\Phi(t) - 2\pi\nu_c t]}$, 相位因子变 $\Phi(t) = 2\pi\nu_c t + arctg\frac{Im(f)}{Re(f)}$.

[**波的观测强度**]

对于单色解析信号, 其强度 $S = f^2 = ff^*$. 准单色波的时间平均值可以近似用这个表达式表示, 即对于准单色波 $V(t)$ 其观测强度 $I =< VV^* >$.

对于准单色波 $\begin{cases} E_x(t) = a_1(t)e^{i[\Phi_1(t) - 2\pi\bar{\nu}t]} \\ E_y(t) = a_2(t)e^{i[\Phi_2(t) - 2\pi\bar{\nu}t]} \end{cases}$, 其在 θ 方向的分量大小为 $E(t, \theta) = E_x \cos\theta + E_y \sin\theta$, 观测强度为 $I(\theta) =< E(t, \theta)E^*(t, \theta) >$.

[**准单色波的 Stokes 参量**] 对于准单色波 $\begin{cases} E_x(t) = a_1(t)e^{i[\Phi_1(t) - 2\pi\bar{\nu}t]} \\ E_y(t) = a_2(t)e^{i[\Phi_2(t) - 2\pi\bar{\nu}t]} \end{cases}$, 要得到由 E_1, E_2, δ 表示 Stokes 参量, 只需要令 $E_1 =< |a_1| >, E_1 =< |a_2| >$, 并对多项式的每一项在时间上求平均.

此时 $Q^2 + U^2 + V^2 = (< a_1 >^2 + < a_2 >^2)^2 \leq (< a_1^2 > + < a_2^2 >)^2 = I^2$, 与单色波不同.

[**偏振度**] 偏振度描述偏振波的庞加莱球偏离半径为 I 的球体的程度, $p = \frac{\sqrt{Q^2+U^2+V^2}}{I}$.

[Stokes 参量的测量]

由 $I = E_1^2 + E_2^2 = E_a^2 + E_b^2$, 得 $S_0 = I = I(0) + I(\frac{\pi}{2})$.

如果使测量到的电场分量 E_y 相对 E_x 增加相位移动 ε, 则观测强度 $E(t,\theta,\varepsilon) = E_x \cos\theta + E_y e^{i\varepsilon} \sin\theta$.

通过调整接收设备的角度 θ 和相移 ε, 可以测量得到 $\begin{cases} I(0,0) = E_x^2 \\ I(\frac{\pi}{2},0) = E_y^2 \\ I(\frac{\pi}{4},0) = \frac{1}{2}S + E_xE_y \\ I(\frac{3\pi}{4},0) = \frac{1}{2}S - E_xE_y \\ I(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}(E_x^2 - E_y^2 + i2E_xE_y) \\ I(\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}(E_x^2 - E_y^2 - i2E_xE_y) \end{cases}$.

进而将 Stokes 参数近似为 $\begin{cases} S_0 = I = I(0,0) + I(\frac{\pi}{2},0) = E_x^2 + E_y^2 \\ S_1 = Q = I(0,0) - I(\frac{\pi}{2},0) = E_x^2 - E_y^2 \\ S_2 = U = I(\frac{\pi}{4},0) - I(\frac{3\pi}{4},0) = 2E_xE_y \\ S_3 = V = I(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}) - I(\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{2}) = i2E_xE_y \end{cases}$.