自旋与全同性原理 (作业: 20230528)

1. 自旋: 粒子的一个内禀自由度;
   (a) 电子的自旋: $s_z = \pm\frac{\hbar}{2}$;
2. 波色子与费米子: 自旋为整数的粒子称为波色子, 半整数为费米子;
   (a) 波色子可以处于同一状态, 费米子则遵从泡利不相容原理;
3. 电子的波函数: 有两个自旋方向, 表示为 $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$(或记为 $\Psi(x, y, z, s_z) = \Psi(x, y, z)\chi(s_z)$), 归一化条件 $\int(|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2)d\tau$;
4. 自旋算符: $\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = 3 \times \frac{\hbar^2}{4}$, $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$;
   (a) 自旋算符的对易关系: 自旋算符满足对易关系 $[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z$(其他方向同理), 也满足反对易关系 $\{\hat{S}_x, \hat{S}_y\} = \hat{S}_x\hat{S}_y + \hat{S}_y\hat{S}_x = 0$(其他方向同理);
   (b) 自旋算符的本征态: $\hat{S}^2$ 和 $\hat{S}_z$ 分别记为 $|\uparrow>= |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}>$ 和 $|\downarrow>= |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}>$;
   (c) 自旋翻转算子: $\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$, 其作用 $\begin{cases} \hat{S}_+|s, s_z >= \sqrt{s(s+1) - s_z(s_z+1)}\hbar|s, s_z + 1 > \\ \hat{S}_-|s, s_z >= \sqrt{s(s+1) - s_z(s_z-1)}\hbar|s, s_z - 1 > \end{cases}$;
5. 泡利矩阵: $\vec{S} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z) = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$, 仿照升降阶算符 $\begin{cases} \hat{\sigma}^+ = \frac{1}{2}(\hat{\sigma_x} + i\hat{\sigma_y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\sigma^-} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma_x} - i\hat{\sigma_y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$;
6. 角动量叠加:
   (a) 无耦合表象: 两个要叠加的自旋角动量完备集 $\{\hat{J}_1^2, \hat{J_{1z}}, \hat{J}_2^2, \hat{J_{2z}}\}$;
      i. 本征值与本征矢: $\hat{J}_1^2|j_1, m_1 >= j_1(j_1+1)\hbar^2|j_1, m_1 >$, $\hat{J}_{1z}|j_1, m_1 >= m_1\hbar|j_1, m_1 >$;

ii. 自旋量子数: $j_{max}=j_1+j_2$, 由基矢数目 $(2j_1+1)(2j_2+1)=\sum\limits_{j_{min}}^{j_{max}}(2j+1)=\frac{(2j_{max}+1)+(2j_{min}+1)}{2}(j_{max}-j_{min}+1)=j_{max}(2+j_{max})-(j_{min}^2-1)$ 得 $j_{min}=|j_1-j_2|$;

(b) 有耦合表象: 引入总自旋角动量的完备集 $\{\hat{J}^2,\hat{\vec{J}}_z,\hat{J}_1^2,\hat{J}_2^2\}$(其中 $\hat{J}^2=(\hat{\vec{J}}_1+\hat{\vec{J}}_2)^2=\hat{J}_1^2+\hat{J}_2^2+2\ \hat{\vec{J}}_1\cdot\ \hat{\vec{J}}_2$);

i. 本征值: $\hat{J}^2|j,m,j_1,j_2>=j(j+1)\overline{h}^2|j,m,j_1,j_2>,\hat{J}_z|j,m,j_1,j_2>=m\overline{h}|j,m,j_1,j_2>,\hat{J}_1^2|j,m,j_1,j_2>=j_1(j_1+1)\overline{h}^2|j,m,j_1,j_2>$;

ii. 本征矢: $|j,m,j_1,j_2>=\sum\limits_{m_1}\sum\limits_{m_2}|j_1,m_1,j_2,m_2><j_1,m_1,j_2,m_2|j,m,j_1,j_2>$, 其中 $<j_1,m_1,j_2,m_2|j,m,j_1,j_2>$ 被称为克莱布希-高登 (CG) 系数 (矢量耦合系数), 另外 m_1,m_2 不独立有 $m_1=m-m_2$;

iii. 磁量子数: $m=m_1+m_2$;

iv. 自旋量子数可能的取值: $j_1+j_2,j_1+j_2-1,...,|j_1-j_2|$;

7. 自旋-自旋耦合: 设自旋 $\vec{S}_1,\vec{S}_2$ 是两个电子的自旋, 它们耦合的总角动量 $\vec{S}=\vec{S}_1+\vec{S}_2,\hat{S}_\alpha=\hat{S}_{1\alpha}+\hat{S}_{2\alpha}$, 且 $\hat{\vec{S}}\times\hat{\vec{S}}=i\overline{h}\hat{\vec{S}},[\vec{S}^2,\vec{S}_\alpha]=0,\alpha\in\{x,y,z\}$;

(a) 对电子而言 $j_1=j_2=\frac{1}{2}$, 耦合表象表示为 $|j,m>$, 无耦合表象表示为 $|m_1,m_2>$;

8. 自旋-轨道耦合: 设电子的总角动量为 $\vec{J}$, 自旋角动量为 $\vec{S}$, 轨道角动量为 $\vec{L}$, 则 $\vec{J}=\vec{S}+\vec{L},\hat{J}^2=\hat{L}^2+\hat{S}^2+\overline{h}\hat{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\vec{L}}$;

(a) 对电子而言 $\hat{S}^2=\frac{3}{4}\overline{h}^2$, 则耦合力学量完全集表示为 $\{\hat{J}^2,\hat{J}_z,\hat{L}^2\}$;

9. 塞曼效应: 原子被置于均匀外磁场 $\vec{B}_e$ 中时, 能级分裂的现象;

10. 全同粒子: 固有性质完全相同的微观粒子, 如所有的电子;

(a) 可区分的全同粒子: 两个粒子的波函数在空间完全不重叠;

11. 全同性原理: 在全同粒子组成的体系中, 两个全同粒子的相互代换不引起物理状态的改变;

12. 费米子: 自旋为半奇数, 体系波函数是交换反对称的;

(a) 泡利不相容原理: 同一体系中的两个全同费米子不能处于同样的状态;

13. 波色子: 自旋为零或正整数,体系波函数是交换对称的;

14. 朗道能级: 电子在匀强磁场中运动时所处的能级;