函数的连续性与微积分定理

1. 连续函数的性质

[**函数的不连续（间断）点**]

第一类间断点: 函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处的左极限 $f(a-0)$ 和右极限 $f(a+0)$ 都存在, 但 $f(a-0) = f(a) = f(a+0)$ 不成立或无意义, 则 $x = a$ 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点.

(1). 若 $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$, 或 $f(a-0) = f(a+0)$ 但 $f(a)$ 不存在, 则称 $x = a$ 为函数 $f(x)$ 的可去间断点;

(2). 若 $f(a-0) \neq f(a+0)$, 则称 $x = a$ 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

第二类间断点 (本性间断点): 函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处的左极限 $f(a-0)$ 和右极限 $f(a+0)$ 至少一个不存在, 则 $x = a$ 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

(1). 若 $f(a-0) = \infty$ 和 $f(a+0) = \infty$ 至少一个成立, 则称 $x = a$ 为函数 $f(x)$ 的无穷间断点;

(2). 若 $f(a-0) \neq f(a+0)$, 且 $\left|\lim\limits_{x\to a}\right| \leq M$, 则称 $x = a$ 为函数 $f(x)$ 的振荡间断点.

[**连续函数的保号性**] 若函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 连续, 并且 $f(a) > 0$(或 $f(a) < 0$) 成立, 那么 $\forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 有 $f(x_0) > 0$(或 $f(x_0) < 0$) 成立.

[**连续函数的有界性定理**] 在闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 一定在该区域有界.

[**最大最小值定理**] 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $\exists x_1 \in [a, b]$ 使 $f(x_0) = f_{min}(x) = m(x \in [a, b])$, 也 $\exists x_2 \in [a, b]$ 使 $f(x_2) = f_{max}(x) = M(x \in [a, b])$.

[**中间值定理 (介值定理)**] 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,K 是介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 间的任意一个值, 则 $\exists \xi \in [a, b]$ 使 $f(\xi) = K$.

[**零点存在定理 (波尔查诺定理)**] 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) \leq 0$, 则 $\exists \xi \in [a, b]$ 使 $f(\xi) = 0$.

2. 微积分定理

[**牛顿-莱布尼兹公式 (微积分基本定理)**] 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续或分段连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 则 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

[**罗尔中值定理**] 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内存在有限导数 $f'(x)$, 且在区间两端点有 $f(a) = f(b)$, 则 $\exists\xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi) = 0$.

[**拉格朗日中值定理 (中值定理, 有限改变量定理)**] 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内连续, 在开区间 (a,b) 内存在有限导数 $f'(x)$, 则 $\exists\xi \in (a,b)$ 使 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

拉格朗日中值定理的几何意义: $\exists\xi \in (a,b)$ 使在 $[a,b]$ 上有定义的光滑连续函数 $y = f(x)$ 的曲线在 $(\xi, f(\xi))$ 处的切线与连接 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 两点的弦平行.

拉格朗日中值定理的常见变形:

(1). $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

(2). $f(x+\Delta x) - f(x) = f'(\xi)\Delta x(x < \xi < x + \Delta x)$

(3). $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x+\theta\Delta x)\Delta x(\theta \in (0,1))$

[**柯西中值定理 (广义中值定理)**] 若函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,$g(b) \neq g(a)$, 在开区间 (a,b) 内有有限导数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$, 且在开区间 (a,b) 内 $g'(x) \neq 0$, 则 $\exists\xi \in (a,b)$, 使 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

[**泰勒定理**] 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有定义, 在 $x_0 \in (a,b)$ 点存在 $n+1$ 阶导数, 则 $\forall x \in (a,b)$ 有 $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$,$\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$ 称为函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的泰勒展开式,$R_n(x)$ 称为该点处泰勒展开式的余项.

泰勒展开式的皮亚诺型余项: $R_n(x) = o\left[(x-x_0)\right]^n$.

泰勒展开式的拉格朗日型余项: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, (\xi \in (a,b))$.

泰勒展开式的柯西型余项: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, (\theta \in (0,1))$.

泰勒展开式的积分型余项: $R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$

[**积分中值定理**] 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

[**积分第一中值定理**] 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界可积,$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内不变号, 则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

[**积分第二中值定理**] 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界可积, 且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调的, 则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a+0)\int_a^\xi g(x)dx + f(b-0)\int_\xi^b g(x)dx$.

[**无穷限广义积分收敛判别**] 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,$u>a$,$v<b$,$u>v$, 当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx$,$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{v\to-\infty}\int_v^b f(x)dx$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{u\to+\infty\\ v\to-\infty}}\int_v^u f(x)dx$ 各式右侧极限存在时称各式左侧的无穷限广义积分收敛, 否则称为发散.

[**无界函数的广义积分 (瑕积分)**] 若函数 $f(x)$ 在给定区间 $[a,b]$ 上只有一个瑕点 $x=c$(即函数 $f(x)$ 在 $x=c$ 点的邻域内无界), 而 $\exists\varepsilon,\varepsilon'>0$ 使 $f(x)$ 在 $[a,c-\varepsilon]$ 和 $[c+varepsilon',b]$ 上可积, 当极限 $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon'\to0}}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)dx\right]$ 存在时记 $f(x)$ 从 a 到 b 的瑕积分为 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon'\to0}}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)dx\right]$.

[**瑕积分的柯西主值 (无界函数广义积分在主值意义下收敛)**] 若瑕积分 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon'\to0}}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)dx\right]$ 右侧极限不存在, 但当假设 $\varepsilon=\varepsilon'\to0$ 时该极限存在, 则称该极限为瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的 (柯西) 主值, 记作 $P.V.\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right]$, 此时称该无界函数广义积分在主值意义下收敛, 否则称为发散.