级数收敛的判别与幂级数的收敛

1. 数项级数收敛的判别

[**柯西准则**] 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是:$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in N^*$ 使得当 $n > N$ 时, 对一切 $p \in N*, |A_{n+p} - A_n| = \left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} a_i\right| < \varepsilon$ 成立.

[**级数收敛的必要条件**] 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

[**同号级数收敛判别法**]

达朗贝尔判别法 (比值审敛法): 若 $a_n > 0(n \in N^*), \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, 则当 $q < 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 当 $q > 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

柯西判别法 (根值审敛法): 若 $a_n \geq 0(n \in N^*), \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, 则当 $q < 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 当 $q > 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

极限审敛法: 对于 $a_n > 0(n \in N^*)$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$:

(1). 若满足 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = l > 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

(2). 若 $\exists p > 1$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n = l \geq 0$ 且 $l < +\infty$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

[**数项级数的绝对收敛**] 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 并且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 也收敛, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

[**数项级数的条件收敛**] 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

[**变号级数收敛判别法**]

莱布尼兹判别法 (交错级数审敛法): 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 满足条件 $a_n \geq a_{n+1}$, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 则该级数收敛.

达朗贝尔判别法: 若变号级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$, 则当 $l < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛; 当 $l > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

狄里克莱判别法: 若部分和 $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ 有界,b_n 单调且 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

阿贝尔判别法: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且 $b_n(n \in N*)$ 为单调有界数列, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

2. 函数项级数收敛的判别

[**函数项级数的逐点收敛**] 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 对每一个 $x \in [a,b]$ 的部分和 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ 都有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) = S(x)$, 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上逐点收敛, 函数 $S(x)$ 是它的和, 区间 $[a,b]$ 是它的收敛区域.

[**函数项级数的一致收敛**] 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 对于 $\forall\varepsilon > 0$,$\exists N = N(\varepsilon) \in N*$, 使得当 $n > N$ 时, 对 $x \in I$, 都有 $|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ 成立, 则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于和 $S(x)$. 也称函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$.

[**函数项级数一致收敛的几何意义**] 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于和 $S(x)$,$\forall\varepsilon > 0$, 则 $\exists N \in N^*$, 当 $n > N$ 时, 每一个 $x \in I$ 的部分和 $S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(x)$, 曲线 $S_n(x)$ 都将位于 $y = S(x) + \varepsilon$ 与 $y = S(x) - \varepsilon$ 之间.

[**函数项级数一致收敛的判别法**]

柯西准则: 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛的充分必要条件是: 对 $\forall\varepsilon > 0$,$\exists N = N(\varepsilon) \in N^*$, 当 $n > N$ 时使 $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$ 对 $\forall p \in N$ 以及 $\forall x \in [a,b]$ 成立.

外尔斯特拉斯判别法: 对于函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 若有收敛的数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 存在, 且 $\forall x \in [a,b]$,$|u_n(x)| \le a_n (n \in N^*)$ 成立, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上绝对且一致收敛.

狄里克莱判别法: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和对 $\forall x \in [a,b]$ 和 $n \in N^*$ 都有 $S_n(x) \le M$, 函数序列 $\{v_n(x)\}$ 对 $\forall x \in [a,b]$ 都单调且 $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛.

阿贝尔判别法: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛, 函数序列 $\{v_n(x)\}$ 对每个 x 是单调序列, 且 $\forall x \in [a,b]$ 和 $\forall n \in N^*$ 都有 $|v_n(x)| \le M$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛.

3. 幂级数的收敛

[**幂级数的绝对收敛性**] 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = \alpha$ 时收敛, 则 $\forall x \in \{x | x \in R, |x| < |\alpha|\}$, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都绝对收敛.

[**收敛半径与收敛区间**] 对于任何幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,$\exists R \in [0, +\infty)$, 使当 $|x| < R$ 时级数绝对收敛, 当 $|x| > R$ 时级数发散. 这个数 R 称为给定级数的收敛半径, 区间 $(-R, R)$ 为它的收敛区间. 但在区间端点 $x = -R$ 和 $x = R$ 处级数可能收敛也可能发散.

[**幂级数收敛半径的计算**]

柯西-阿达玛公式: $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

另一个公式: $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

[**幂级数和的连续性**] 幂级数的和在收敛区间内每一点都连续.

[**幂级数的逐项积分**] 在幂级数的收敛区间内任一点 x 都有 $\int_0^x S(x) dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x x^n dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

[**幂级数的逐项微分**] 若幂级数的和 $S(x)$ 在该级数的收敛区间内任一点 x 都可微, 则逐项微分的和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{dx^n}{dx} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{dS(x)}{dx} = S'(x)$ 且与原幂级数有同样的收敛半径.