理论力学

一. 基础知识

1. 运动的描述方法

[**机械运动**] 物体在空间的相对位置随时间而改变的物理现象.

[**理论力学**] 研究物体机械运动普遍遵循的规律的一门学科.

[**理论力学的研究方向**] 有限自由度的力学体系 (质点和刚体), 无限自由度的力学体系 (连续介质力学: 弹性力学和流体力学).

本书研究的对象为有限自由度力学体系.

[**理论力学的研究次序**]

1. 运动学: 研究描述机械运动现象;

2. 动力学: 研究机械运动应当遵循哪些规律;

3. 静力学: 研究平衡问题. (静力学只在工程问题中被单独讨论, 在理论课程中作为动力学的一部分来处理)

[**力学的研究范畴**]

理论力学: 即经典力学, 适用于宏观和低速条件;

量子力学: 适用于坐标 x 和相应的动量 p_x 不能同时准确测定 (测不准关系) 的微观粒子运动问题;

相对论力学: 适用于速度很高 (接近光速) 的物体运动问题.

[**参考系**] 物体的位置只能相对地确定, 因此应该首先找出另一个物体作为参考, 这种作为参考的物体被称为参考系.

确定参考系后, 才可以在其上面选取适当的坐标系来确定物体在空间的相对位置.

[**质点**] 当物体的形状和大小与所研究的问题无关或所起的作用很小时, 可以在尺度上将其看作一个几何点 (不必考虑其形状和大小), 其质量可以认为就集中于这个点上. 这种抽象化模型被称为质点.

[**位矢**] 对于质点 P 的位置, 可以用一个引自原点 O 到质点 P 的矢量 $\vec{r}$ 来表示.

空间直角坐标系中为: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

[**常用坐标系**]

空间坐标系: 直角坐标系, 柱面坐标系, 球面坐标系, 自然坐标系;

平面坐标系: 平面直角坐标系, 平面极坐标系, 自然坐标系.

[**运动学方程**] 一组给出了质点在空间或平面上任一时刻 t 所占据的位置的方程. 它们表达出了质点的运动规律, 所以通常被称为质点的运动学方程.

[**宏观物体机械运动的物质性**] 运动学方程应该是时间 t 的单值的且连续的函数.

1. 不能有两个或两个以上的物体同时占据同一空间;

2. 物体不能从空间某一位置突然改变到另一位置.

[**轨道**] 运动质点在空间 (或平面上) 一连串所占据的点形成的一条轨迹.

直线运动: 质点运动的轨道是一条直线;

曲线运动: 质点运动的轨道是一条曲线 (曲线轨道上的任何一点一般都可作出切线).

消去运动方程中的参数 t 即可得到轨道方程.

注意: 运动轨道是直线还是曲线取决于参考系的选择.

[**位移**] 在给定时间内, 联结质点的初位置 A 和末位置 B 的直线, 并从 A 指向 B 加上箭头, 则构成在此给定时间内相对于该参考系的位移. 以符号 $\Delta\vec{r}$ 表示.

[**瞬时速度**] 位失的时间变化率被称为质点在时刻 t 的瞬时速度. 以符号 $\vec{v}$ 表示.

$\vec{v}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}_t = \vec{v}$

[**速率**] 如果不计速度的方向, 则称之为速率.

[**匀速直线运动**] 质点在一直线上运动 (方向不变), 且速度的量值也不变 (大小不变), 则称为匀速直线运动.

[**加速度**] 速度的时间变化率被称为加速度.

[**瞬时加速度**] 质点在时刻 t 时的速度的时间变化率, 可简称加速度. 以符号 $\vec{a}$ 表示.

$\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$

[**匀加速直线运动**] 加速度保持不变的直线运动.

注意, 之后对矢量谈及不变均指大小与方向同时不变.

2. 常用坐标系中的力学量

[**直角坐标系**] 设某质点 P 沿空间曲线 C 运动, 其位矢为 $\overrightarrow{OP}=\vec{r}$, P 点在空间中的坐标为 (x,y,z).

位矢: $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$;

速度: $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}$;

加速度: $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$;

速率: $v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$.

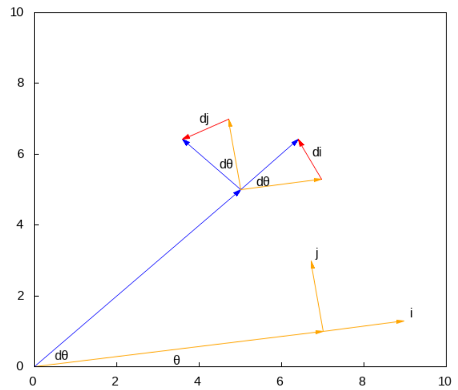
[**平面极坐标系**] 定义平行于极径的基矢 $\vec{i}$ 和垂直于极径向 θ 正方向的基矢 $\vec{j}$.

位矢: $\vec{r}=r\vec{i}$;

速度: $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(r\vec{i})=\dot{r}\vec{i}+r\dot{\theta}\vec{j}$;

加速度: $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{i}+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\vec{j}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{i}+\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\vec{j}$

[**平面极坐标系中基矢对时间微商的推导**]



当 $d\theta\to 0$ 时, 包含 $d\vec{i}$ 和 $d\vec{j}$ 的三角形可被视为等腰直角三角形. 有:

$$\begin{cases} d\vec{i}=d\theta\vec{j} \\ d\vec{j}=-d\theta\vec{i} \end{cases} \quad \text{两边对时间取微商得:} \begin{cases} \frac{d\vec{i}}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\vec{j} \\ \frac{d\vec{j}}{dt}=-\frac{d\theta}{dt}\vec{i} \end{cases}.$$

[**运动的径向与横向分量**]

$$\text{速度:} \begin{cases} v_r=\dot{r} \\ v_\theta=r\dot{\theta} \end{cases}, \text{加速度:} \begin{cases} a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \end{cases}$$

[**曲率半径**] $\rho = \frac{ds}{d\theta}$

[**自然坐标系**] 在平面内, 延运动轨迹的切线和法线方向建立平面直角坐标系. 基矢 $\vec{i}$ 延轨迹增加的方向, $\vec{j}$ 为曲线凹侧法线.

自然坐标系的基矢微分: $\begin{cases} \frac{d\vec{i}}{d\theta} = \vec{j} \qquad \frac{d\vec{j}}{d\theta} = -\vec{i} \end{cases}$;

速度: $\vec{v} = v\vec{i} = \frac{ds}{dt}\vec{i}$;

加速度: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{i} + \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{i} + \frac{d\vec{i}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{i} + \frac{v^2}{\rho}\vec{j} == \frac{dv}{dt}\vec{i} + \frac{v^2}{\rho}\vec{j}$;

切向加速度: $\frac{d^2s}{dt^2}$, 法向加速度: $\frac{v^2}{\rho}$.

[**内禀 (bǐng) 方程**] 又称禀性方程, 本性方程. 指方程中分量的分解完全取决于轨道本身的形状, 与所选用的坐标系无关.

[**密切平面**] 空间曲线上一点的切线和轨道上无限接近切点的一个点所确定的极限平面, 即轨道上无限接近的两点的切线所确定的极限平面.

[**空间自然坐标系**] 将某点的自然坐标系放入该点的密切平面内, 定义主法线基矢为平面内的 $\vec{j}$(或 $\vec{e}_n$), 再添加垂直于密切平面的副法线基矢 $\vec{k}$(或 $\vec{e}_b$). 此时在副法线方向上加速度的分量则为零. 故原加速度表达式仍然适用.