一. 运动方程

1. 广义坐标

[**质点**] 在描述其运动可以忽略大小的物体.

[**位置**] 质点在空间的位置由其径矢 $\vec{r}$ 确定, 其分量用笛卡儿坐标 x,y,z 表示.

[**速度**] 径矢 $\vec{r}$ 对时间的导数 $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ 称为质点的速度.

对时间的导数可表示为 $\vec{v}=\dot{\vec{r}}$.

[**加速度**] 径矢 $\vec{r}$ 对时间的二阶导数 $\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ 称为质点的加速度.

[**完整系统的自由度**] 对于完整系统, 唯一确定系统位置所需独立变量的数目称为系统的自由度. 这些独立变量不一定是笛卡儿坐标.

N 个质点组成的系统的自由度为 $3N$.

[**广义坐标**] 对于 s 个自由度的系统, 可以完全刻画其位置的任意 s 个变量 $q_1,q_2,...,q_n$ 称为该系统的广义坐标.

要确定系统的状态, 需要给定系统的所有广义坐标和广义速度, 且原则上可以预测以后的运动.

[**广义速度与加速度**] 广义坐标的导数 $\dot{q}_i$(以后记 $\dot{q}$ 即表示所有坐标的导数) 称为广义速度, 加速度 $\ddot{q}$ 同理.

[**运动方程**] 加速度与坐标和速度的关系式被称为运动方程.

对于函数 $q(t)$, 这个关系是二阶微分方程. 如果能求出函数 $q(t)$, 进而就能确定系统的轨迹.

2. 最小作用量原理

[**泛函**] 如果对某一类函数 $\{y(x)\}$ 中的每个函数 $y(x)$, 有一个 v 的值与之对应, 那么变量 v 称为依赖函数 $y(x)$ 的泛函, 记作 $v=v[y(x)]$.

[**函数的变分**] 所谓泛函 $v[y(x)]$ 的变量 $y(x)$ 的变分 δy 是指两个函数之间的差 $\delta y=y(x)-y_1(x)$, 其中 $y_1(x)$ 是与 $y(x)$ 属于同一函数类的某一函数.

[**泛函的变分**] 如果泛函 $v[y(x)]$ 的改变量 $\Delta v=v[y(x)+\delta y]-v[y(x)]$ 可以表示为形式 $\Delta v=L[y(x),\delta y]+\beta(y(x),\delta y)\cdot\max|\delta y|$, 其中 $L[y(x),\delta y]$ 对 δy 来说是线性的. 且当 $\max|\delta y|\to 0$ 时, $\beta(y(x),\delta y)\to 0$. 那么 $L[y(x),\delta y]$ 称为泛函 $v[y(x)]$ 的变分, 记作 δv, 并有 $\delta v=\left.\frac{\partial v[y(x)+\alpha\delta y]}{\partial\alpha}\right|_{\alpha}=0$.

[**最小作用量原理 (哈密顿原理)**] 每一个力学系统都可以用一个确定的函数 $L(q_1,q_2,...,q_s,\dot{q}_1,\dot{q}_2,...,\dot{q}_s,t)$ 或简记为 $L(q,\dot{q},t)$ 所表征, 函数 L 称为给定系统的拉格朗日函数. 假设在时刻 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 系统的位置由两组坐标 $q^{(1)}$ 和 $q^{(2)}$ 确定, 那么系统在这两个位置之间的运动使得积分 $S=\int_{t_1}^{t_2}L(\ ,\dot{q},t)dt$ 取最小值, 积分 S 称为最小作用量.

注意: 对于整个运动轨迹而言, 这里应该取极小值而非最小值. 取最小值仅对足够小的区段成立.

[**运动微分 (拉格朗日) 方程的推导**] 问题: 确定轨迹 $q = q(t)$ 使作用量 $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt$ 取最小值 (极小值).

对于有 1 个自由度的系统. 设 $q = q(t)$ 使 S 最小, 即任意 $q(t) + \delta q(t)$ 代替 $q(t)$ 都会使 S 增大. 因此, $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$.

哈密顿原理可以写为 $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt = 0$, 即 $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} \right) dt = 0$.

因为 $\delta \dot{q} = \frac{d\delta q}{dt}$, 即 $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d\delta q}{dt} \right) dt = 0$.

对于 $\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d\delta q}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d(\delta q)$ 项, 由分部积分法得 $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}{dt} \cdot \delta q dt$.

因为 $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, 所以 $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2} = 0$. 即 $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0$.

上述作用量取最小值 (极小值) 的条件应该对每一个 δq 都成立, 则 $\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$.

对于有 s 个自由度的系统, 最小作用量原理中有 s 个不同的函数 $q_i(t)$ 需要独立变分. 此时上式推广为 $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, i = (1, 2, ..., s)$.

运动微分方程可记为 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = (1, 2, ..., s)$. 其是包含 s 个未知函数 $q_i(t)$ 的 s 个二阶微分方程组. 这个微分方程组通常包含 $2s$ 个任意常数.

3. 伽利略相对性原理

[**时间的均匀性**] 若某一参考系中时间是均匀的, 则拉格朗日函数不显式地与时间有关.

[**空间的均匀性**] 若某一参考系中空间是均匀的, 则拉格朗日函数不显式地与空间有关.

[**空间的各向同性**] 若某一参考系中空间是各向同性的, 则拉格朗日函数不依赖矢量 $\vec{\dot{q}}$ 的方向.

[**惯性参考系**] 存在一种参考系, 空间相对它是均匀的各向同性的, 时间相对它是均匀的. 这种参考系被称为惯性参考系.

[**惯性参考系中的拉格朗日函数**] 在惯性参考系中, 拉格朗日函数仅与速度大小显式相关, 即 $L = L(|\vec{\dot{q}}|) = L(|\vec{v}|)$. 此时可以认为 L 是 $\vec{v}^2 = v^2$ 的函数, 即 $L = L(v^2)$.

[**惯性参考系中的运动微分方程**] 在惯性参考系中, 运动方程变化为 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0$, 即 $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \vec{C}_0$. 且由于 L 仅与 v 有关, 所以 $\vec{v} = \vec{C}_1$.

[**惯性定律 (牛顿第一定律)**] 惯性参考系中质点任何自由运动的速度不变.

[**伽利略相对性原理**] 无穷多个惯性参考它们相互作匀速直线运动. 它们中时间和空间的性质是相同的, 力学规律也是相同的.

[**绝对时间假设**] 不同参考系中的时间是相同的. 这一假设只在经典力学中成立.

[**伽利略变换**] 设有两个不同的参考系 K 和 K', 其中 K' 相对 K 以速度 $\vec{V}$ 运动, 同一个质点相对这两个参考系的坐标 $\vec{r}$ 和 $\vec{r}'$ 满足 $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t$, 这两个参考系中的时间是相同的.

力学运动方程在伽利略变换下具有不变性.

4. 自由质点的拉格朗日函数

[**拉格朗日函数的可加性**] 设力学系统由封闭的 A 和 B 两部分组成, 拉格朗日函数分别是 L_A 和 L_B. 在两个部分相距足够远以至于它们的相互作用可以忽略的极限下, 系统的拉格朗日函数趋于 $\lim L = L_A + L_B$.

每一个独立部分的运动不可能包含与另一部分相关的物理量.

[**相差 $\frac{d}{dt}f(q,t)$ 的拉格朗日函数之差**] 考虑两个拉格朗日函数 $L'(q,\dot{q},t)$ 和 $L(q,\dot{q},t)$, 它们相差坐标和时间的函数 $f(q,t)$ 对时间的全导数 $L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t)+\frac{df(q,t)}{dt}$, 则作用量 $S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q,\dot{q},t)dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}f(q,t)dt = S + f(q^{(2)},t_2) - f(q^{(1)},t_1)$. 此时附加项在变分时消失, 条件 $S'=0$ 和 $S=0$ 完全等价, 故运动微分方程相同.

所有惯性系中物体的运动方程相同.

[**自由质点的拉格朗日函数**]

惯性系 K 以无穷小速度 $\vec{\varepsilon} \to \vec{0}$ 相对另一个惯性系 K' 运动, 则根据绝对时间假设 $\vec{v}' = \vec{v}+\vec{\varepsilon}$.

由空间的各向同性, K' 的拉格朗日函数 $L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2\vec{v}\cdot\vec{\varepsilon} + \varepsilon^2)$.

由麦克劳林公式 $f(x) = \sum\limits_{n_0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 将 L' 展开成 $\vec{\varepsilon}$ 的幂级数:

设 $u(\vec{\varepsilon}) = v^2 + 2\vec{v}\cdot\vec{\varepsilon} + \varepsilon^2$, 则 $L(v'^2) = L(u) = L\left[u(\vec{0})\right] + \frac{\partial L}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\Big|_{\vec{\varepsilon}=\vec{0}} \cdot \vec{\varepsilon} + R_2(\vec{\varepsilon})$

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial u}(2\vec{v} + 2\vec{\varepsilon})\Big|_{\vec{\varepsilon}=\vec{0}} \cdot \vec{\varepsilon} + R_2(\vec{\varepsilon}) = L(v^2) + 2\frac{\partial L}{\partial u}\vec{v}\Big|_{\vec{\varepsilon}=\vec{0}} \cdot \vec{\varepsilon} + R_2(\vec{\varepsilon})$$

因为 $\frac{\partial v'^2}{\partial v^2} = \frac{\partial v'^2}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial v^2} = \frac{\partial(v^2+2\vec{v}\cdot\vec{\varepsilon}+\varepsilon^2)}{\partial v} \Big/ \frac{\partial v^2}{\partial v} = \frac{2v+2\varepsilon}{2v}$. 且 $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$, 故 $\frac{\partial v'^2}{\partial v^2}\Big|_{\vec{\varepsilon}=\vec{0}} = 1$.

所以 $L(v'^2) = L(v^2) + 2\frac{\partial L}{\partial v'^2}\frac{\partial v'^2}{\partial v^2}\vec{v}\Big|_{\vec{\varepsilon}=\vec{0}} \cdot \vec{\varepsilon} + R_2(\vec{\varepsilon}) = L(v^2) + 2\frac{\partial L}{\partial v^2}\vec{v}\cdot\vec{\varepsilon} + R_2(\vec{\varepsilon})$.

由于所有惯性系中物体运动方程都相同, 所以 L' 和 L 只相差某个关于时间和坐标的函数 $f(q,t)$ 对时间的全导数, 即 $2\frac{\partial L}{\partial v^2}\vec{v}\cdot\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt}f(q,t) = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}$.

化简到 $2\frac{\partial L}{\partial v^2}\frac{\partial q}{\partial t}\varepsilon = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}$. 对比系数得 $2\varepsilon\frac{\partial L}{\partial v^2} = \frac{\partial f}{\partial q}$, 可知这里 $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ 与 v 无关.

设 $\frac{\partial f}{\partial q} = m\varepsilon$($m$ 为常数), 则 $2\varepsilon\frac{\partial L}{\partial v^2} = m\varepsilon$, 即 $\frac{\partial L}{\partial v^2} = \frac{m}{2}$.

即 $L = \frac{m}{2}v^2$.

[**质量**] 自由运动质点的拉格朗日函数中的物理量 m 被称为质点的质量.

[**自由质点系的拉格朗日函数**] 根据拉格朗日函数的可加性, 对于无相互作用的质点组成的自由质点系有 $L = \sum\limits_a \frac{m_a v_a^2}{2}$.

[**常见坐标系下自由质点的拉格朗日函数**] $L = \frac{m}{2}v^2$, $v = \dot{l} = \frac{dl}{dt}$, $v^2 = \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{dl^2}{dt^2}$.

笛卡儿坐标系: $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$;

柱坐标系: $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$, $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$;

球坐标系: $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$, $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$.

5. 质点系的拉格朗日函数

[**封闭质点系**] 质点之间有相互作用, 但不受外部任何物体作用的质点系.

[**封闭质点系拉格朗日函数的一般形式**] $L = T - U$. 其中 $\vec{r}_a$ 是第 a 个质点的径矢, 函数 $T = \sum\limits_a \frac{m_a v_a^2}{2}$ 称为质点系的动能. 封闭质点系内质点间的相互作用用坐标的函数 $-U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...)$ 表示, 函数 U 称为质点系的势能.

[**相互作用传递的瞬时性**] (在经典力学中) 如果相互作用不是瞬时传递, 而是以一个有限的速度传递, 而时间的绝对性 (假说) 意味着通常的速度相加法则适用于所有现象. 因此在有相对运动的不同参考系中相互作用的传递速度不同. 此时相互作用的物体的运动规律在不同惯性参考系中也不同, 违背了伽利略相对性原理 (假说).

[**运动的可逆性**] 由 $L = \sum\limits_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...)$ 可知, 时间不仅是均匀的, 而且是各向同性的, 即时间的性质在两个方向上是相同的 (v^2). 用 $-t$ 代替 t 不会改变拉格朗日函数, 也就不会改变运动方程.

如果参考系中某种运动是可能的, 则逆运动也是可能的. 即可以按照相反的顺序经历前述运动中形同的状态.

[**牛顿方程**] 将 $L = T - U$ 代入运动方程 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$(即 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a}$), 得 $m_a \frac{d\vec{v}_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$.

[**力**] 牛顿方程右边的矢量 $\vec{F}_a = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$ 被称为作用在第 a 个质点上的力.

[**封闭质点系在广义坐标下的拉格朗日函数**] $L = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,k} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k - U(q)$, $a_{ik}(q)$ 只是广义坐标的函数. 设广义坐标 $x_a = f(q_1, q_2, ..., q_s)$, 有 $\dot{x}_a = \sum\limits_k \frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k$.

[**非封闭质点系的拉格朗日函数**] 非封闭质点系 A 与已知运动的质点系 B 相互作用 (即 A 在由 B 产生的给定外场中运动). $L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t))$, 势能相对于封闭质点系可能显含时间.

对于封闭的质点系 $A + B$, 有 $L = T_A + T_B - U(q_A, q_B)$. 因为 B 的运动已知, 所以 $\dot{q}_B$ 和 q_B 都是只依赖时间的函数 (即某个时间函数的全导数), 则 $L = T_A - U(q_A, q_B(t))$.

[**均匀力场**] 如果一个场中任意位置都受到相同的力 $\vec{F}$, 则称这个外场是均匀的.

在均匀外场中, 势能 $U = -\vec{F} \cdot \vec{r}$.

[**约束**] 不同物体 (或质点) 之间的相互作用会限制它们的相对位置, 这被称为约束.