三. 运动方程的积分

1. 一维振动

[**一维运动**] 只有一个自由度系统的运动.

[**一维运动方程的积分**] $t=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}+C_0$. 其中, 总能量 E 和积分常数 C_0 表示运动方程解的两个任意常数. 运动发生在 $U(x)<E$ 的空间区域.

在笛卡儿坐标系中, 一维运动的拉格朗日函数一般形式为 $L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-U(x)$. 其对应的能量守恒表达式为 $E=\frac{m\dot{x}^2}{2}+U(x)$.

对方程分离变量得 $\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{2}{m}\left[E-U(x)\right]}$, 两边积分得 $t=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}+C_0$.

因为动能 $T\geq 0$, 所以 $E=T+U\geq U$. 即运动只发生在 $U(x)<E$ 的空间区域.

[**运动的边界**] 势能等于总能量的点确定了运动的边界 $E=U(x)$. 这一点的速度为零, 被称为转折点.

有界运动: 区域由两个转折点限定的运动, 运动发生在空间的有限区域内;

无界运动: 区域不受限制或只有单侧限制, 运动发生在无限区域内, 质点可以运动到无穷远处.

[**振动及其周期**] 质点在两个边界之间往复运动. 振动周期 $T(E)=\sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{dx}{E-U(x)}$, 积分的限是 E 给定时方程 $U(x)=E$ 的根.

根据时间的可逆性, 从 x_1 运动到 x_2 的时间等于 x_2 到 x_1 的时间. 因此振动周期是 x_1 运动到 x_2 时间的 2 倍.

即 $T(E)=2t=\sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{dx}{E-U(x)}$.

[**由周期确定势能**] 关于系统势能对位置的单值函数 $x(U)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2m}}\int_0^U\frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}}$.

假定 $U-x$ 曲线极小值处在坐标原点. 令 $x=x(U)$ 且 x_1 和 x_2 是 $E=U(x)$ 的解.

由 $T(E)=\sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}$, 有 $x_1(E)=x_2(E)=U$, $dx=\frac{dx}{dU}dU$. 则:

$$T(E)=\sqrt{2m}\int_0^E\left[\frac{dx_2(U)}{dU}-\frac{dx_1(U)}{dU}\right]\frac{dU}{\sqrt{E-U}}.$$

定义参数 α, 在等式两边除以 $\sqrt{\alpha-E}$: $\frac{T(E)}{\sqrt{\alpha-E}}=\frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{\alpha-E}}\int_0^E\left[\frac{dx_2(U)}{dU}-\frac{dx_1(U)}{dU}\right]\frac{dU}{\sqrt{E-U}}$.

两边对 E 从 0 到 α 积分: $\int_0^\alpha\frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha-E}}=\sqrt{2m}\int_0^\alpha dE\int_0^E\left[\frac{dx_2(U)}{dU}-\frac{dx_1(U)}{dU}\right]\frac{dU}{\sqrt{E-U}\sqrt{\alpha-E}}$.

其积分区域为 $E:0\leq E\leq\alpha$, $U:0\leq U\leq U$. 变换积分顺序为 $U:0\leq U\leq\alpha$, $E:U\leq E\leq\alpha$. 即 $\int_0^E\frac{T(E)dE}{\sqrt{\alpha-E}}=\sqrt{2m}\int_0^\alpha\left[\frac{dx_2(U)}{dU}-\frac{dx_1(U)}{dU}\right]dU\int_U^\alpha\frac{dE}{\sqrt{\alpha-E}\sqrt{E-U}}=\pi\sqrt{2m}[x_2(\alpha)-x_1(\alpha)]$.

令 $\alpha=U$ 得: $x_2(U)-x_1(U)=\frac{1}{\pi\sqrt{2m}}\int_0^U\frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}}$.

令 $U=U(x)$ 关于 U 轴对称, 即 $x_2(U)=-x_1(U)=x(U)$. 得 $x(U)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2m}}\int_0^U\frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}}$.

2. 有心力场

[**有心力场**] 有心力场中质点的势能只与质点到某一固定点的距离有关.

有心力场的力: $\vec{F}=-\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}}=-\frac{dU}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$.

有心力场对力心的角动量 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{p}$ 守恒.

[**循环坐标**] 拉格朗日函数不显含的坐标被称为循环坐标.

对循环坐标 q_i, 由运动方程有 $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$. 此时, 广义动量 $p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 是运动积分.

[**有心力场的角动量**] 在柱坐标系中, 有心力场对力心的角动量 $\vec{M}=mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z$. 质点的运动轨迹 $\vec{r}=\vec{r}(t)$ 始终在 $r-\varphi$ 平面内.

对于力心的角动量 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{p}$ 守恒. 因为 $\vec{M}$ 与 $\vec{r}$ 始终垂直且 $\vec{M}$ 是守恒量, 所以 $\vec{r}$ 始终在与 $\vec{M}$ 垂直的平面内.

在 $\vec{r}$ 所在的平面内引入极坐标 r,φ, 质点的拉格朗日函数为 $L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-U(r)$.

此时 φ 是循环坐标, 其广义动量 $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}=|\vec{M}_z|=|\vec{M}|$.

[**掠面速度**] 无限邻近的两个径矢和轨道微元围成的扇形面积 $df=\frac{1}{2}\vec{r}\cdot d\varphi\vec{r}$, f 随时间的变化律 $\dot{f}$ 被称为掠面速度.

有心力场中, $\vec{M}=mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z$, 即 $\vec{M}=2m\dot{f}\vec{e}_z$.

[**开普勒第二定律**] 在有心力场中, 质点的掠面速度恒定.

因为 $\vec{M}=2m\dot{f}\vec{e}_z$ 是运动积分, 所以 $\dot{f}=\frac{|\vec{M}|}{2m}$ 是守恒量.

[**面积积分**] 有心力场内运动质点对力心的角动量守恒定律也被称为面积积分.

[**有效势能**] 定义有心力场中运动质点的有效势能 $U_{eff}=U(r)+\frac{M^2}{2mr^2}$.

由有心力场中质点对力心的角动量 $M=mr^2\dot{\varphi}$ 守恒, 能量 $E=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+U(r)$.

得 $E=\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{M^2}{2mr^2}+U(r)$.

能量可以等效为一个质点沿 $\vec{r}$ 直线运动的势能和一个力场的势能 $\frac{M^2}{2mr^2}+U(r)$ 之和. 定义这个等效力场的势能为有效势能 U_{eff}.

[**离心势能**] 有效势能中的非势能项 $\frac{M^2}{2mr^2}$ 提供了等效于平衡向心力的力, 被称为离心势能.

[**有心力场中质点到力心的距离**] 有隐含数 $t=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)]-\frac{M^2}{m^2r^2}}}+C$ 定义了距离 r 与时间 t 的关系.

由 $E=\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{M^2}{2mr^2}+U(r)$ 求解 $\dot{r}$ 得:

$\dot{r}=\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)]-\frac{M^2}{m^2r^2}}$.

分离变量得 $t=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)]-\frac{M^2}{m^2r^2}}}+C$.

[**有心力场中质点的轨道方程**] $\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}} + C.$

由 $\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}$ 得 $dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)]-\frac{M^2}{m^2r^2}}}.$

由 $M = mr^2\dot{\varphi}$ 得 $d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt.$

消去 dt 得:$d\varphi = \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}}.$

两边积分得: $\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}} + C.$

[**质点在有心力场中运动的边界**] 对于有效势能 $U_{eff}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E$ 的解 r, 即质点沿 $\vec{e}_r$ 方向运动的边界.

无界情况 ($r_{min} \leq r$): 此时质点从无穷远处来, 到无穷远处去;

有界情况 ($r_{min} \leq r \leq r_{max}$): 此时质点在 $r = r_{min}$ 和 $r = r_{max}$ 确定的圆环内运动.

[**轨道单次进动的角度**] $\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}}.$

由 $\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}} + C$ 以及质点在 $r = r_{min}$ 和 $r = r_{max}$ 确定的圆环内往复运动, 得: $\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}}.$

[**轨道封闭条件**] $\Delta\varphi$ 是 2π 的有理数倍, 即 $\Delta\varphi = \frac{2\pi m}{n}, (m, n \in Z)$. 经过 n 个运动周期, 质点径矢转过 m 圈后, 回到初始位置.

[**质点落入场心的条件**] $U(r)$ 像 $-\frac{\alpha}{r^2}(\alpha > \frac{M^2}{2m})$ 一样趋于 $-\infty$. 或 $U(r)$ 正比于 $-\frac{1}{r^n}(n > 2)$ 的方式趋向 $-\infty$.

当 $r \to 0$ 时, 势能够快速地趋向 $-\infty$, 质点才可能落入质心.

由不等式 $\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} > 0$ 或 $Er^2 < r^2U(r) + \frac{M^2}{2m}$, 得:

可能使 $r \to 0$ 的条件是 $\lim\limits_{r\to 0} r^U(r) + \frac{M^2}{2m} \leq 0$, 即 $r^2U(r)|_{r\to 0} < -\frac{M^2}{2m}$.

即 $U(r)$ 像 $-\frac{\alpha}{r^2}(\alpha > \frac{M^2}{2m})$ 一样趋于 $-\infty$, 或 $U(r)$ 正比于 $-\frac{1}{r^n}(n > 2)$ 的方式趋向 $-\infty$.

当 $r \to 0$ 时, 对于 $M \neq 0$ 的运动, 其离心势能 $\frac{M^2}{2mr^2} \propto \frac{1}{r^2}$ 趋向 ∞. 此时, 等效于向场心外的力趋向无穷大. 因此, 即使场本身具有吸引特性, 质点也通常不会通过场的中心.

3. 二体问题

[**二体问题**] 由两个相互作用的质点组成的系统.

[**约化质量**] 二体问题中等效质点的质量 $m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$.

二体问题可以等价为一个质量为约化质量 m 的质点, 在中心对称外场 $U(r)$ 中的运动. 两质点 m_1 和 m_2 相对共同质心的轨迹 $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$ 和 $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(t)$ 可由 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ 进一步求解.

[**约化质量的引入过程**]

二体系统势能只依赖两点距离 $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, 其拉格朗日函数为 $L = \frac{m_1 \dot{r}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{r}_2^2}{2} - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$.

引入相对位矢 $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, 设原点位于质心 $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = (m_1+m_2)\vec{0} = 0$.

解得 $\begin{cases} \vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \\ \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \end{cases}$, 也有 $\begin{cases} \dot{\vec{r}}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}} \\ \dot{\vec{r}}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}} \end{cases}$.

系统的拉格朗日函数可表示为 $L = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\dot{r}^2 - U(r)$.

引入约化质量 $m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$, 则 $L = \frac{m\dot{r}^2}{2} - U(r)$.

[**圆锥曲线**] $\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi$. 其中, $2p$ 为曲线的正焦弦, e 为曲线的偏心率.

圆 $(e=0)$: p 为圆的半径;

椭圆 $(0<e<1)$: 椭圆的半长轴和半短轴分别为 $a = \frac{p}{1-e^2}$ 和 $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$. 曲线上的点到其中一个焦点的距离满足 $r_{min} = \frac{p}{1+e} = a(1-e)$ 和 $r_{max} = \frac{p}{1-e} = a(1+e)$. 椭圆的面积 $S = \pi ab$;

抛物线 $(e=1)$;

双曲线 $(1<e)$: 双曲线的半轴 $a = \frac{p}{e^2-1}$. 曲线上的点到曲线焦点的距离满足 $r_{min} = \frac{p}{1+e}$

原点在外焦点的双曲线: $\frac{p}{r} = -1 + e\cos\varphi$, $r_{min} = \frac{p}{e-1}$.

[**引力场中的轨道方程**] 当引力势能满足 $U = -\frac{\alpha}{r}$ 时, 轨道方程满足 $\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi$. 其中, $p = \frac{M^2}{m\alpha}$, $e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$.

由 $\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E-U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + C$ 带入引力场得: $\varphi = \arccos\frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + C$.

选择适当的初始角度 φ, 使 $C = 0$. 设 $p = \frac{M^2}{m\alpha}$, $e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$.

方程变形为:$\varphi = \arccos\frac{\frac{p}{r} - 1}{e}$, 即 $\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi$. 表示一个焦点位于原点的圆锥曲线.

对于两个质点相互作用的问题, 每个质点的轨道都是圆锥曲线, 其焦点之一为系统的质心.

[**质点无法脱离引力场的轨迹**]

椭圆情况: 当 $E<0$ 时, $e<1$. 质点的运动轨迹为椭圆, 运动有界. 椭圆的半长轴 $a=\frac{p}{1-e^2}=\frac{\alpha}{2|E|}$, 半短轴 $b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{M}{\sqrt{2m|E|}}$. 质点到场心的距离满足 $r_{min}=\frac{p}{1+e}=a(1-e)$, $r_{max}=\frac{p}{1-e}=a(1+e)$.

圆情况: 当 $E=(U_{eff})_{min}=\left(-\frac{\alpha}{r}+\frac{M^2}{2mr^2}\right)_{min}$ 时, 即 $E=\left(-\frac{\alpha}{r}+\frac{M^2}{2mr^2}\right)_{r=\frac{M^2}{m\alpha}}=-\frac{m\alpha^2}{2M^2}$ 时, $e=0$. 运动轨迹为圆.

运动周期: $T=2\pi a^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}=\frac{\pi\alpha\sqrt{m}}{\sqrt{2|E|^3}}$.

由 $M=2m\dot{f}$ 得: $f=\frac{M}{2m}t$, 即 $t=\frac{2mf}{M}$.

当掠过面积 $f=\pi ab$ 时, 经过时间 T 即周期. $T=\frac{\pi\alpha\sqrt{m}}{\sqrt{2|E|^3}}$.

[**质点脱离引力场的轨迹**]

抛物线情况: 当 $E=0$ 时, $e=1$, 质点沿着近心点距离为 $r_{min}=\frac{p}{2}$ 的抛物线运动. 如果质点自无穷远处从静止开始运动, 就会出现这种情况;

双曲线情况: 当 $E>0$ 时, $e>1$, 轨道是原点为内焦点的双曲线, 近心点到中心的距离 $r_{min}=\frac{p}{1+e}=a(e-1)$. 其中 $a=\frac{p}{e^2-1}=\frac{\alpha}{2E}$.

[**引力场中的椭圆轨道**] $\begin{cases} x=a(\cos\xi-e) \\ y=a\sqrt{1-e^2}\sin\xi \end{cases}$. 参数 $\xi\in[0,2\pi)$.

由时间 $t=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(r)]-\frac{M^2}{r^2}}}+C$ 引入 $a=\frac{\alpha}{2|E|}$ 和 $e=\sqrt{1+\frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$, 得

$t=\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int\frac{rdr}{\sqrt{-r^2+\frac{\alpha}{|E|}r-\frac{M^2}{2m|E|}}}=\sqrt{\frac{ma}{\alpha}}\int\frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2-(r-a)^2}}$.

令 $r-a=-ae\cos\xi$, 则 $t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}\int(1-e\cos\xi)d\xi=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi-e\sin\xi)+C$.

选择时间起点使 $C=0$, 得: $t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi-e\sin\xi)$.

因 $r-a=-ae\cos\xi$, 所以 $r=a(1-e\cos\xi)$. 即得到 $r-t$ 的参数方程 $\begin{cases} r=a(1-e\cos\xi) \\ t=\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(\xi-e\sin\xi) \end{cases}$.

对于笛卡儿坐标 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$, 由 $\frac{p}{r}=1+e\cos\varphi$.

有 $ex=p-r=a(1-e^2)-a(1-e\cos\xi)=ae(\cos\xi-e)$.

由 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 得 $\begin{cases} x=a(\cos\xi-e) \\ y=a\sqrt{1-e^2}\sin\xi \end{cases}$. 参数 $\xi\in[0,2\pi)$.

[**引力场中的双曲线轨道**] 与椭圆轨道方法类似. 极坐标参数方程 $\begin{cases} r = a(e\cosh\xi - 1) \\ t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e\sinh\xi - xi) \end{cases}$.

对笛卡儿坐标 $\begin{cases} x = a(e - \cosh\xi) \\ y = a\sqrt{e^2-1}\sinh\xi \end{cases}$. 参数 $\xi \in (-\infty, +\infty)$.

[**对相斥场的讨论**] 相斥场的势能 $U = \frac{\alpha}{r}, (\alpha > 0)$. 有效势能 $U_{eff} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$. 此时能量总为正, 运动总是无界. 轨道只能是双曲线 $\frac{p}{r} = -1 + e\cos\varphi$.

近心点: $r_{min} = \frac{p}{e-1} = a(e+1)$.

极坐标中的轨道方程: $\begin{cases} r = a(e\cosh\xi + 1) \\ t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}}(e\sinh\xi + \xi) \end{cases}$.

笛卡儿坐标中的轨道方程: $\begin{cases} x = a(e + \cosh\xi) \\ y = a\sqrt{e^2-1}\sinh\xi \end{cases}$.

[**仅在有心力场 $U = \frac{\alpha}{r}$ 内的运动有特有的运动积分.**]

计算矢量 $\vec{v} \times \vec{M} + \frac{\alpha\vec{r}}{r}$ 对时间的全导数, 得 $\dot{\vec{v}} \times \vec{M} + \frac{\alpha\vec{v}}{r} - \frac{\alpha\vec{r}(\vec{v}\cdot\vec{r})}{r^3}$.

因为 $\vec{M} = m\vec{r} \times \vec{v}$, 所以上式为 $m\vec{r}(\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}) - m\vec{v}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{v}}) + \frac{\alpha\vec{v}}{r} - \frac{\alpha\vec{r}(\vec{v}\cdot\vec{r})}{r^3}$.

因为运动方程 $m\dot{\vec{v}} = \alpha\frac{\vec{r}}{r^3}$, 所以 $m\vec{r}(\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}) - m\vec{v}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{v}}) + \frac{\alpha\vec{v}}{r} - \frac{\alpha\vec{r}(\vec{v}\cdot\vec{r})}{r^3} = 0$.