四. 粒子

1. 粒子分裂

[**粒子在质心参考系 (C 系) 中分裂**] 选相对粒子分裂前 (同分裂后) 的质心静止的参考系研究粒子分裂.

分裂后两粒子的质量为 m_1, m_2. 它们动量的大小相等 ($p_1 = p_2 = p_0$), 方向相反.

设粒子分裂前的内能为 E_{int}, 分裂后两粒子的内能为 E_{1int}, E_{2int}. 粒子分裂前的动能 $T_0 = 0$, 分裂后两粒子的动能 $T_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_0^2}{2m_1}, T_2 = \frac{p_0^2}{2m_2}$.

由能量守恒 $E_{int} + T_0 = E_{1int} + T_1 + E_{2int} + T_2$, 即 $E_{int} = E_{1int} + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_{2int} + \frac{p_0^2}{2m_2}$.

粒子分裂后的速度大小为 $v_{10} = \frac{p_0}{m_1}, v_{20} = \frac{p_0}{m_2}$.

[**粒子的分裂能**] 粒子分裂前后内能的变化量提供了粒子分裂后的动能, 这部分变化量即粒子分裂的能量 (分裂能). $\varepsilon = \frac{p_0^2}{2m}$. 其中, m 为二体系统的约化质量.

根据定义, 分裂能 $\varepsilon = E_{int} - E_{1int} - E_{2int}$.

由能量守恒 $E_{int} = E_{1int} + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_{2int} + \frac{p_0^2}{2m_2}$, 得 $\varepsilon = \frac{p_0^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$.

引入约化质量 $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$, 得 $\varepsilon = \frac{p_0^2}{2m}$.

[**粒子在实验室参考系 (L 系) 中分裂**] 选相对粒子分裂前 (同分裂后) 的质心以速度 $\vec{V}$ 运动的参考系研究粒子分裂.

设 $\vec{v}$ 为分裂后其中一个粒子相对 L 系的速度, $\vec{v}_0$ 为这个粒子相对 C 系的速度. 有 $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{V}$, 即 $\vec{v}_0 = \vec{v} - \vec{V}$.

设粒子速度 $\vec{v}$ 与质心速度 $\vec{V}$ 的夹角为 θ, 则 $(\vec{v} - \vec{V})^2 = v_0^2 = v_2 + V^2 - 2vV\cos\theta$.

1. 当 $V < v_0$ 时, 粒子可以向任意角度 θ 运动.

2. 当 $V > v_0$ 时, 粒子只能相对 L 系向前运动. 即 $\vec{V}$ 在 $\vec{v}$ 上的投影 $V\cos\theta$ 满足 $V\cos\theta \geq v$.

取临界角 $\theta = \theta_{max}$, 有边界 $V\cos\theta_{max} = v$. 由边角关系 $v_0^2 = v_2 + V^2 - 2vV\cos\theta$, 得 $V^2\cos^2\theta_{max} + V^2 - 2V^2\cos^2\theta_{max} = v_0^2$. 即 $\sin\theta_{max} = \frac{v_0}{V}$.

[**C 系与 L 系的关系**] 设分裂后一个粒子在 L 系中与速度 $\vec{v}$ 和相对粒子组质心的速度 $\vec{V}$ 的夹角为 θ, 粒子在 C 系中运动的方向 (即 L 系中与 $\vec{v}_0$ 的夹角) 为 θ_0. 有 $\tan\theta = \frac{v_0\sin\theta_0}{v_0\cos\theta_0 + V}$.

由 $\vec{v}_0 = \vec{v} - \vec{V}$ 得 $v_0^2 = v^2 + V^2 - 2vV\cos\theta$. 即 $\cos\theta = -\frac{v_0^2 - v^2 - V^2}{2vV}$.

由矢量三角形 $\frac{v_0}{\sin\theta} = \frac{v}{\sin(\pi - \theta_0)} = \frac{v}{\sin\theta_0}$, 得 $\sin\theta = \frac{v_0\sin\theta_0}{v}$.

由 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, 得 $\tan\theta = -\frac{v_0\sin\theta_0}{v} \cdot \frac{2vV}{v_0^2 - v^2 - V^2} = -\frac{2v_0V\sin\theta_0}{v_0^2 - v^2 - V^2}$.

由 $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{V}$, 得 $v^2 = v_0^2 + V^2 + 2v_0V\cos\theta_0$. 有 $v_0^2 - v^2 = -V^2 - 2v_0V\cos\theta_0$.

由 $\tan\theta = -\frac{2v_0V\sin\theta_0}{v_0^2 - v^2 - V^2}$, 得 $\tan\theta = \frac{2v_0V\sin\theta_0}{V^2 + 2v_0V\cos\theta_0 + V^2}$. 即 $\tan\theta = \frac{2v_0\sin\theta_0}{2v_0\cos\theta_0 + 2V} = \frac{v_0\sin\theta_0}{v_0\cos\theta_0 + V}$.

[**L 系与 C 系的关系**] 即在 $\tan\theta=\frac{v_0\sin\theta_0}{v_0\cos\theta_0+V}$ 中求解 θ_0, 得 $\cos\theta_0=-\frac{V}{v_0}\sin^2\theta\pm\cos\theta\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}$.

由 $\sin^2\theta_0+\cos^2\theta_0=1$, 得 $\sin\theta_0=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta_0}$.

由 $\tan\theta=\frac{v_0\sin\theta_0}{v_0\cos\theta_0+V}$, 得 $\tan\theta=\frac{\pm v_0\sqrt{1-\cos^2\theta_0}}{v_0\cos\theta_0+V}$..

即 $\tan^2\theta=\frac{v_0^2-v_0^2\cos^2\theta_0}{v_0^2\cos^2\theta_0+V^2+2v_0V\cos\theta_0}$.

$$\Rightarrow (\tan^2\theta+1)v_0^2\cos^2\theta_0+2v_0V\tan^2\theta\cos\theta_0+(\tan^2\theta V^2-v_0^2)=0$$

$$\Rightarrow \cos\theta_0=\frac{-2v_0V\tan^2\theta\pm\sqrt{4v_0^2V^2\tan^4\theta-4v_0^2(\tan^2\theta+1)(V^2\tan^2\theta-v_0^2)}}{2v_0^2(\tan^2\theta+1)}.$$

由 $\tan^2\theta+1=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$, 得 $\cos\theta_0=-\frac{V}{v_0}\sin^2\theta\pm\cos\theta\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}$.

对于 $v_0>V$ 的情况, $\cos\theta_0$ θ 是单值的, 表达式中 $\pm$ 取正号.

对于 $v_0<V$ 的情况, $\cos\theta_0$ θ 是单多值的, 将有两个可能的 $\cos\theta_0$ 取值分别对应正负号.

[**多个粒子分裂时粒子密度在 C 系中的角分布**] 假设原始粒子在空间中运动方向是随机的, 即在平均意义下是各向同性的. 在 C 系中, 分裂后粒子密度 $\frac{dn}{n}$ 与 θ_0(出射方向与原始粒子速度方向的夹角) 的关系满足 $\frac{dn}{n}=\frac{1}{2}\sin\theta_0 d\theta_0$.

在 C 系中, 分裂后的粒子具有相同的能量, 它们飞出方向的分布是各向同性的. 对于从立体角 $d\Omega$ 飞出的粒子数 dn, 满足 $\frac{dn}{n}=\frac{d\Omega}{4\pi}$. 其中 n 为分裂后粒子总数.

因为 $d\Omega=\sin\theta d\theta d\varphi$, 对 φ 积分后得到 $d\Omega_0=d\Omega(\theta_0)=2\pi\sin\theta_0 d\theta_0$.

粒子出射概率对 θ_0 的分布 $\frac{dn}{n}=\frac{d\Omega_0}{4\pi}=\frac{1}{2}\sin\theta_0 d\theta_0$.

[**多个粒子分裂时粒子密度在 L 系中随动能的分布**] 在 L 系中, $\frac{dn}{n}=\frac{dT}{2mv_0V}$. 动能的取值范围为 $[T_{min},T_{max}]=[\frac{1}{2}m(v_0-V)^2,\frac{1}{2}m(v_0+V)^2]$.

由 $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{V}$, 得: $v^2=v_0^2+V^2+2v_0V\cos\theta_0$.

由 $\cos\theta_0=\frac{v^2-v_0^2-V^2}{2v_0V}$, 得: $d\cos\theta_0=\frac{d(v^2)}{2v_0V}$.

由 $T=\frac{1}{2}mv^2$, 得: $dT=\frac{1}{2}md(v^2)$.

由 $d\cos\theta_0=\frac{\frac{1}{2}md(v^2)}{mv_0V}$, 得: $d\cos\theta_0=-\sin\theta_0 d\theta_0=\frac{dT}{2mv_0V}$.

由 $\frac{dn}{n}=\frac{1}{2}\sin\theta_0 d\theta_0$, 得: $\frac{dn}{n}=\left|-\frac{dT}{2mv_0V}\right|=\frac{dT}{2mv_0V}$.

[**C 系中分裂后的粒子动能上限**] 对于由总质量 M 分裂后的粒子 m_1, 其最大动能 $(T_{10})_{max}=\frac{M-m_1}{M}\varepsilon$. 其中 ε 为分裂能.

设其它粒子作为一个系统的内能为 E'_{int}, 粒子 m_1 的初动能 $T_{10}=\frac{1}{2m_0}p_0^2$.

由 $E_{int}=E'_{int}+E_{1int}+\frac{p_0^2}{2m_1}+\frac{p_0^2}{2(M-m_1)}$, 得: $p_0^2=\frac{2m_1(M-m_1)}{M}(E_{int}-E'_{int}-E_{1int})$.

由 $T_{10}=\frac{1}{2m_1}p_0^2$, 得: $T_{10}=\frac{M-m_1}{M}(E_{int}-E'_{int}-E_{1int})$.

当 E'_{int} 最小时, T_{10} 取到最大值. 当其它粒子速度一致时, 它们的总内能 E'_{int} 最小. 此时 $E_{int}-E'_{int}-E_{1int}=\varepsilon$.

所以 $(T_{10})_{max}=\frac{M-m_1}{M}\varepsilon$.

2. 粒子弹性碰撞

[**弹性碰撞**] 两个粒子碰撞而不改变它们的内部状态.

即应用能量守恒定律时可以不考虑粒子的内能.

[**粒子在 C 系中的弹性碰撞**] 设碰撞前粒子 m_1 和 m_2 的速度为 $\vec{v}_{10},\vec{v}_{20}$, 两者速度的差 $\vec{v}=\vec{v}_{10}-\vec{v}_{20}$, 则碰撞后的速度 $\begin{cases}\vec{v}_{10}'=\frac{m_2 v}{m_1+m_2}\vec{n}_0\\ \vec{v}_{20}'=-\frac{m_1 v}{m_1+m_2}\vec{n}_0\end{cases}$. 其中, 单位矢量 $\vec{n}_0$ 的方向与碰撞过程有关.

在 C 系中, 由 $\begin{cases}m_1\vec{r}_{10}+m_2\vec{r}_{20}=\vec{0}\\ \vec{r}=\vec{r}_{10}-\vec{r}_{20}\end{cases}$, 得: $\begin{cases}\vec{v}_{10}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}\\ \vec{v}_{20}=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}\end{cases}$.

由动量守恒和动能守恒定律 $\begin{cases}m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20}=m_1\vec{v}_{10}'+m_2\vec{v}_{20}'\\ m_1v_{10}^2+m_2v_{20}^2=m_1v_{10}'^2+m_2v_{20}'^2\end{cases}$, 并设碰撞后 $\vec{v}_{10}'$ 运动方向的单位矢量为 $\vec{n}_0$,

解得: $\begin{cases}\vec{v}_{10}'=\frac{m_2 v}{m_1+m_2}\vec{n}_0\\ \vec{v}_{20}'=-\frac{m_1 v}{m_1+m_2}\vec{n}_0\end{cases}$.

[**粒子在 L 系中的弹性碰撞**] 设碰撞前粒子 m_1 和 m_2 的速度为 $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{n}_0$ 为 C 系中 m_1 碰撞后运动方向的单位矢量, 则碰撞后的速度 $\begin{cases}\vec{v}_1'=\frac{m_2 v}{m_1+m_2}\vec{n}_0+\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}\\ \vec{v}_2'=-\frac{m_1 v}{m_1+m_2}\vec{n}_0+\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}\end{cases}$. 引入约化质量 $m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$, 动量 $\begin{cases}\vec{p}_1'=mv\vec{n}_0+\frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)\\ \vec{p}_2'=-mv\vec{n}_0+\frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)\end{cases}$.

C 系相对 L 系有速度 $\vec{V}$, 由动量守恒 $m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20}+(m_1+m_2)\vec{V}=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$, 有 $\vec{V}=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$.

由 C 系中的弹性碰撞 $\begin{cases}\vec{v}_{10}'=\frac{m_2 v}{m_1+m_2}\vec{n}_0\\ \vec{v}_{20}'=-\frac{m_1 v}{m_1+m_2}\vec{n}_0\end{cases}$ 和 $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{V}$ 得: $\begin{cases}\vec{v}_1'=\frac{m_2 v}{m_1+m_2}\vec{n}_0+\vec{V}\\ \vec{v}_2'=-\frac{m_1 v}{m_1+m_2}\vec{n}_0+\vec{V}\end{cases}$.

代入 $\vec{V}=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$ 得: $\begin{cases}\vec{v}_1'=\frac{m_2 v}{m_1+m_2}\vec{n}_0+\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}\\ \vec{v}_2'=-\frac{m_1 v}{m_1+m_2}\vec{n}_0+\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}\end{cases}$.

由动量 $\vec{p}=m\vec{v}$ 得: $\begin{cases}\vec{p}_1'=\frac{m_1m_2v}{m_1+m_2}\vec{n}_0+\frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)\\ \vec{p}_2'=-\frac{m_1m_2v}{m_1+m_2}\vec{n}_0+\frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)\end{cases}$.

由约化质量 $m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ 得: $\begin{cases}\vec{p}_1'=mv\vec{n}_0+\frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)\\ \vec{p}_2'=-mv\vec{n}_0+\frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)\end{cases}$.

[**L 系中 m_2 静止时的非正面碰撞**] 设 θ_1, θ_2 分别为 $\vec{p_1'}, \vec{p_2'}$ 在 L 系中偏离碰撞方向 $\vec{p_1}$ 的角度. χ 为 m_1 在 C 系中的出射方向 $\vec{n}_0$ 与 $\vec{p}_1$ 的夹角. 则夹角满足 $\begin{cases} \tan\theta_1 = \frac{m_2 \sin\chi}{m_1 + m_2 \cos\chi} \\ \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2} \end{cases}$, 速度满足 $\begin{cases} v_1' = \frac{v}{m_1+m_2}\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos\chi} \\ v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1+m_2}\sin\frac{\chi}{2} \end{cases}$.

由 $\vec{v}_2 = \vec{0}$ 得: $v = v_1$, 则 $\frac{m_2}{m_1+m_2}p_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}v_1 = mv$.

由三角关系 $\frac{\frac{m_1}{m_1+m_2}p_1}{\sin(\chi-\theta_1)} = \frac{mv}{\sin\theta_1} = \frac{\frac{m_2}{m_1+m_2}p_1}{\sin\theta_1}$, 得: $\tan\theta_1 = \frac{m_2\sin\chi}{m_1+m_2\cos\chi}$.

由三角关系 $\frac{mv}{\sin\theta_2} = \frac{\frac{m_2}{m_1+m_2}p_1}{\sin(\pi-\chi-\theta_2)}$, 得: $\theta_2 = \frac{\pi-\chi}{2}$.

由 $\frac{p_1'}{\sin(\pi-\chi)} = \frac{mv}{\sin\theta_1}$ 即 $\frac{m_1 v_1'}{\sin\chi} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\frac{v}{\sin\theta_1}$, 得: $v_1' = \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{\sin\chi}{\sin\theta_1}v$.

由 $\sin\theta_1 = \tan\theta_1\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\theta_1}}$ 得: $\sin\theta_1 = \frac{m_2\sin\chi}{\sqrt{m_1^2+m_2^2+2m_1m_2\cos\chi}}$.

由 $v_1' = \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{\sin\chi}{\sin\theta_1}v$ 得: $v_1' = \frac{v}{m_1+m_2}\sqrt{m_1^2+m_2^2+2m_1m_2\cos\chi}$.

由 $\frac{p_2'}{\sin\chi} = \frac{mv}{\sin\theta_2}$, 得: $v_2' = \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{\sin\chi}{\sin\theta_2}v$.

由 $\theta_2 = \frac{\pi-\chi}{2}$ 得: $\sin\theta_2 = \cos\frac{\chi}{2}$.

由 $\sin\chi = 2\sin\frac{\chi}{2}\cos\frac{\chi}{2}$, 得: $v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1+m_2}\sin\frac{\chi}{2}$.

[**两粒子正碰 (m_2 静止)**] 当两粒子沿直线碰撞时, $\chi = \pi$, 两粒子碰撞后的速度为 $\begin{cases} \vec{v}_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{v} \\ \vec{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{v} \end{cases}$, m_2 获得的最大动能 $E'_{2max} = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}E_1$.

由 $v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\sin\frac{\chi}{2}$ 得: $v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v$.

因为 $m_1, m_2 > 0$, 所以 $\frac{2m_1}{m_1+m_2} > 0$. 即 $\vec{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{v}$.

由 $v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_1m_2\cos\chi}}{m_1+m_2}v$ 得: $v_1' = \frac{|m_1-m_2|}{m_1+m_2}v$. 无法确定方向.

由 $m_1\vec{v} = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$ 得: $\vec{v}_1' = \vec{v} - \frac{m_2}{m_1}\vec{v}_2'$.

由 $\vec{v}_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\vec{v}$ 得: $\vec{v}_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\vec{v}$.

因为 $\chi = \pi$ 时, $\sin\frac{\chi}{2}$ 取到最大值. 所以此时 v_2' 取到最大值.

由 $E' = \frac{1}{2}mv'^2$ 得: $E'_{2max} = \frac{1}{2}m_2 v'^2_{2max} = \frac{2m_1^2m_2}{(m_1+m_2)^2}v^2$.

由 $E_1 = \frac{1}{2}m_1v_1$, $v = v_1 - v_2$, $v_2 = 0$, 得: $E_1 = \frac{1}{2}m_1v^2$, 即 $v = \sqrt{\frac{2E_1}{m_1}}$.

由 $E'_{2max} = \frac{2m_1^2m_2}{(m_1+m_2)^2}v^2$ 得: $E'_{2max} = \frac{2m_1^2m_2}{(m_1+m_2)^2}\frac{2E_1}{m_1} = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}E_1$.

[**质量不同的两粒子碰撞后的夹角 $\theta_1+\theta_2$(m_2 静止)**] 碰撞后两粒子运动方向的夹角 $\theta_1+\theta_2$ 与两粒子的质量有关, $\theta_1+\theta_2\begin{cases}>\frac{\pi}{2},0<m_1<m_2\\<\frac{\pi}{2},0<m_2<m_1\end{cases}$.

由 $\tan\theta_1=\frac{m_2\sin\chi}{m_1+m_2\cos\chi}$, $\theta_2=\frac{\pi-\chi}{2}$, 得: $\theta_1+\theta_2=arctan\frac{m_2\sin\chi}{m_1+m_2\cos\chi}+\frac{\pi}{2}-\frac{\chi}{2}$.

设 $f(\chi)=\theta_1+\theta_2$, 则 $f'(\chi)=\frac{m_1m_2\cos\chi+m_2^2}{m_1+m_2+2m_1m_2\cos\chi}-\frac{1}{2}$.

求 $f'(\chi)=0$, 即: $2m_1m_2\cos\chi+2m_2^2=m_1^2+m_2^2+2m_1m_2\cos\chi$. 得 $m_1=m_2$.

1. 求 $f'(\chi)>0$, 有 $2m_2^2>m_1^2+m_2^2$, 即 $0<m_1<m_2$.

   因为 $\chi>0$, 所以 $f_{min}(\chi)=f(0)=\frac{\pi}{2}$. 即 $\theta_1+\theta_2>\frac{\pi}{2}$.

2. 求 $f'(\chi)<0$, 有 $0<m_2<m_1$.

   因为 $\chi>0$, 所以 $f_{max}(\chi)=f(0)=\frac{\pi}{2}$, 即 $\theta_1+\theta_2<\frac{\pi}{2}$.

[**θ_1 可能的范围 (m_2 静止)**] 碰撞后粒子 m_1 的运动方向与其碰撞前的运动方向夹角 θ_1 的大小取决于两粒子的质量比 $k=\frac{m_1}{m_2}$. 当 $k>0$ 时 θ_1 有上限 $\sin\theta_{1max}=\frac{m_2}{m_1}$, 当 $0<k<1$ 时 θ_1 可取到任意值.

由 $k=\frac{m_1}{m_2}$ 和 $\theta_1=arctan\frac{m_2\sin\chi}{m_1+m_2\cos\chi}$, 得: $\theta_1=arctan\frac{\sin\chi}{k+\cos\chi}$.

由 $\frac{d\theta_1}{d\chi}=\frac{k\cos\chi+1}{k^2+2k\cos\chi+1}$ 求 $\frac{d\theta_1}{d\chi}=0$, 即 $\begin{cases}k\cos\chi+1=0\\k^2+2k\cos\chi+1\neq0\end{cases}$, 解得: $\begin{cases}\chi=arccos\left(-\frac{1}{k}\right)\\k\neq1\end{cases}$.

因为 $\frac{d^2\theta_1}{d\chi^2}=\frac{(k-k^3)\sin\chi}{(k^2+2k\cos\chi+1)^2}$ 且 $\chi\in[0,\pi]$(即 $\sin\chi>0$) 得: $sign\left[\frac{d^2\theta_1}{d\chi^2}\right]=sign(k-k^3)$.

1. 求 $k-k^3<0$ 满足 $k>0$ 的解得: $k>1$.

   此时 $\frac{d^2\theta_1}{d\chi^2}<0,\theta_1$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值 $\theta_{1max}=arctan\frac{\sin\left[arccos\left(-\frac{1}{k}\right)\right]}{k+\cos\left[arccos\left(-\frac{1}{k}\right)\right]}=arctan\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^2-1}$.

   由 $k>1$ 得: $\theta_{1max}=arctan\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$.

   为与书一致, 由 $\sin\theta=1-\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$, 得: $\sin^2\theta_{1max}=\frac{m_2^2}{m_1^2}$. 即 $\sin\theta_{1max}=\frac{m_2}{m_1}$.

2. 求 $k-k^3<0$ 满足条件的解得: $0<k<1$.

   此时 $\frac{d^2\theta_1}{d\chi^2}>0$, θ_1 在 $(0,+\infty)$ 上的可能最小值 $\theta_{1min}=\frac{\sqrt{k^2-1}}{k^2-1}$ 不存在 (实值).

   此时 θ_1 没有限制.

[**质量相等的两粒子碰撞 (m_2 静止)**] 质量相等的粒子 $m_1=m_2=m$ 碰撞后, 两粒子运动方向垂直, 满足 $\begin{cases}\theta_1=\frac{\chi}{2}\\\theta_2=\frac{\pi-\chi}{2}\end{cases}$. 两粒子的速度满足 $\begin{cases}v_1'=v\cos\frac{\chi}{2}\\v_2'=v\sin\frac{\chi}{2}\end{cases}$.

由 $\tan\theta_1=\frac{m_2\sin\chi}{m_1+m_2\cos\chi}$, $\sin\chi=2\sin\frac{\chi}{2}\cos\frac{\chi}{2}$ 和 $\cos\chi=2\cos^2\frac{\chi}{2}-1$, 得: $\tan\theta_1=\tan\frac{\chi}{2}$, 即 $\theta_1=\frac{\chi}{2}$.

由 $v_1'=\frac{\sqrt{m_1^2+m_2^2+2m_1m_2\cos\chi}}{m_1+m_2}v$ 和 $\cos\chi=2\cos^2\frac{\chi}{2}-1$, 得: $v_1'=\sqrt{\frac{1+\cos\chi}{2}}v=v\cos\frac{\chi}{2}$.

由 $v_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v\sin\frac{\chi}{2}$, 得: $v_2'=v\sin\frac{\chi}{2}$.

3. 粒子散射

[**粒子在有心力场的偏转**] 质量为 m 的粒子自无穷远处平行于 x 轴的瞄准距离 ρ 向 x 轴负半轴以速度 v_∞ 运动. 该粒子在有心力场 $U(r)$ 的作用下发生偏转. 设粒子远离力心后的运动方向与 x 轴夹角为偏转角 χ, 粒子近心点 $(r = r_{min})$ 与力心的连线与 x 轴夹角为 φ_0. 则该过程满足 $\begin{cases} \chi = |\pi - 2\varphi_0| \\ \varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2}dr}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2U}{mv_\infty^2}}} \end{cases}$, 其中 r_{min} 是表达式 $1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2} = 0$ 的根.

由有心立场中粒子运动的角度 $\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}}$, 得: $\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}}$.

由粒子的总能量 $E = T + U$ 在 $r \to \infty$ 处有 $U = 0$ 和 $T = \frac{1}{2}mv_\infty^2$, 得: $E = \frac{1}{2}mv_\infty^2$.

由能量守恒, 得: $\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m(\frac{1}{2}mv_\infty^2-U)-\frac{M^2}{r^2}}}$.

由角动量 $\vec{M} = m\vec{v} \times \vec{r}$, 得在 $r \to \infty$ 处: $M = m\rho v_\infty$.

由有心力场的角动量守恒, 得: $\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{m\rho v_\infty}{r^2}dr}{\sqrt{2m(\frac{1}{2}mv_\infty^2-U)-\frac{m^2\rho^2v_\infty^2}{r^2}}} = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{\rho}{r^2}dr}{\sqrt{1-\frac{2U}{mv_\infty^2}-\frac{\rho^2}{r^2}}}$.

几何上有 $\chi = |\pi - 2\varphi_0|$.

[**有效散射截面**] 当面密度为 n 的粒子束入射有心力场时, 不同瞄准距离的粒子将向不同的偏转角度散射. 若 dN 为单位时间内自偏转角 χ 到 $\chi + d\chi$ 之间出射的粒子数, 则可定义有限散射截面为 $d\sigma = \frac{dN}{n}$, 该物理量具有面积量纲.

有效散射截面描述在偏转角度 $d\chi$ 内出射的粒子数在入射粒子束中对应的截面面积.

[**有效散射截面与散射角的关系**] 若散射角是瞄准距离的单调函数, 则有效散射截面 $d\sigma$ 对平面散射角微元 $d\chi$ 的依赖关系为 $d\sigma = 2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|d\chi$, 有效散射截面 $d\sigma$ 对立体散射角微元 do 的依赖关系为 $d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|do$.

因为散射角是瞄准距离的单调函数, 设 χ 到 $\chi + d\chi$ 的粒子来自瞄准距离 $\rho(\chi)$ 到 $\rho(\chi) + d\rho(\chi)$.

出射粒子数 dN 来自入射圆环面 ρ 到 $\rho + d\rho$, 即 $dN = 2\pi n\rho d\rho$.

由有效散射截面 $d\sigma = \frac{dN}{n}$, 得: $d\sigma = 2\pi\rho d\rho$.

由 $d\rho = \frac{d\rho(\chi)}{d\chi}d\chi$ 并考虑物理意义 (面积非负), 得: $d\sigma = 2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|d\chi$.

在 χ 与 $\chi + d\chi$ 组成的两个同轴半圆锥中, 面积增量 $dS = \pi r\sin\chi \cdot rd\chi = \pi r^2\sin\chi d\chi$.

以母线 r 补全上述圆锥, 得到立体角 do 对应的面积 $2dS = 2\pi r^2\sin\chi d\chi$.

由立体角 $do = \frac{2dS}{r^2}$, 得: $do = 2\pi\sin\chi d\chi$, 即 $d\chi = \frac{do}{2\pi\sin\chi}$.

由 $d\sigma = 2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|d\chi$, 得: $d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|do$.

[**卢瑟福公式**] 对于力场 $U=\frac{\alpha}{r}$, 入射粒子散射后的偏转角 $\varphi_0=arccos\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\rho^2m^2v_\infty^4}}$, 瞄准距离 $\rho^2=\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\tan^2\varphi_0=\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\cot^2\frac{\chi}{2}$, 有效散射截面 $d\sigma=\frac{\pi\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^3\frac{\chi}{2}}d\chi=\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\frac{do}{\sin^4\frac{\chi}{2}}$(有效截面不依赖 α 的符号).

由 $\varphi_0=\int_{r_{min}}^{\infty}\frac{\frac{\rho}{r^2}dr}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2U}{mv_\infty^2}}}$ 和 $U=\frac{\alpha}{r}$ 得: $\varphi_0=\rho\int_{r_{min}}^{\infty}\frac{dr}{r\sqrt{r^2-\frac{2\alpha}{mv_\infty^2}r-\rho^2}}$.

设 $a=\frac{2\alpha}{mv_\infty^2},b=\rho^2$, 由 CAS 系统 Maxima 计算得: $\varphi_0=-\frac{\rho}{\sqrt{b}}arcsin\left(\frac{ar}{\sqrt{a^2+4b}|r|}+\frac{2b}{\sqrt{a^2+4b}|r|}\right)\Big|_{r_{min}}^{\infty}$.

因为 $r>0$, 所以 $\varphi_0=-\frac{\rho}{\sqrt{b}}arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+4b}}+\frac{2b}{\sqrt{a^2+4b}r}\right)\Big|_{r_{min}}^{\infty}$.

代入 $a=\frac{2\alpha}{mv_\infty^2},b=\rho^2$, 得: $\varphi_0=arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}}}\left(\frac{\rho^2}{r}+\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)\right]\Bigg|_{\infty}^{r_{min}}$.

由 $\left(r^2-\frac{2\alpha}{mv_\infty^2}r-\rho^2\right)\Big|_{r=r_{min}}=0$, 得: $r_{min}=\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}+\rho^2}$.

考虑物理意义 $r>0$, 有 $r_{min}=\frac{\alpha}{mv_\infty^2}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}+\rho^2}$.

由 $\varphi_0=arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}}}\left(\frac{\rho^2}{r}+\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)\right]\Bigg|_{\infty}^{r_{min}}$, 得:

$$\varphi_0=arcsin\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}}}\left(\frac{\rho^2}{\frac{\alpha}{mv_\infty^2}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}+\rho^2}}+\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)\right]-arcsin\left(\frac{\frac{\alpha}{mv_\infty^2}}{\sqrt{\rho^2+\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}}}\right).$$

重新设 $a=\frac{\alpha}{mv_\infty^2},b=\rho^2$, 上式化简为: $\varphi_0=arcsin\left(\frac{b}{a\sqrt{a^2+b}+a^2+b}+\frac{a}{\sqrt{a^2+b}}\right)-arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b}}$.

即: $\varphi_0+arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b}}=arcsin\left(\frac{b}{a\sqrt{a^2+b}+a^2+b}+\frac{a}{\sqrt{a^2+b}}\right)$.

$\Rightarrow\sqrt{b}\sin\varphi_0+a\cos\varphi_0=\frac{b+a^2+a\sqrt{a^2+b}}{a+\sqrt{a^2+b}}=\sqrt{a^2+b}$.

由 $\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi_0}$, 得: $(a^2+b)\cos^2\varphi_0-2a\sqrt{a^2+b}\cos\varphi_0+a^2=0$.

解得: $\cos\varphi_0=\frac{a}{\sqrt{a^2+b}}$.

代入 $a=\frac{\alpha}{mv_\infty^2},b=\rho^2$, 得: $\cos\varphi_0=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\rho^2m^2v_\infty^4}}$.

由 $\frac{1}{\cos^2\varphi_0}=1+\tan^2\varphi_0$, 得: $\tan^2\varphi_0=\frac{\rho^2m^2v_\infty^4}{\alpha^2}$, 即 $\rho^2=\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\tan^2\varphi_0$.

由 $\varphi_0=\frac{\pi-\chi}{2}$, 得: $\rho^2=\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\cot^2\frac{\chi}{2}$.

由 $\rho^2=\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\cot^2\frac{\chi}{2}$, 得: $\rho=\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\cot\frac{\chi}{2}$, $d\rho=-\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\frac{1}{\sin^2\frac{\chi}{2}}d\chi$.

由 $d\sigma=|2\pi\rho d\rho|$, 得: $d\sigma=\frac{\pi\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^3\frac{\chi}{2}}d\chi$.

由 $do=2\pi\sin\chi d\chi$, 得: $d\chi=\frac{do}{4\pi\sin\frac{\chi}{2}}\cos\frac{\chi}{2}$.

由 $d\sigma=\frac{\pi\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^3\frac{\chi}{2}}d\chi$, 得: $d\sigma=\frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\frac{do}{\sin^4\frac{\chi}{2}}$.

[**散射出射粒子的有效散射截面**] $d\sigma_2=2\pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{\sin\theta_2}{\cos^3\theta_2}d\theta_2=\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{do_2}{\cos^3\theta_2}$.

由 C 系到 L 系的弹性碰撞出射粒子速度方向与入射粒子偏转角的关系 $\theta_2=\frac{\pi-\chi}{2}$, 得: $\chi=\pi-2\theta_2$.

由 $d\sigma=\pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^3\frac{\chi}{2}}d\chi$, 得: $d\sigma_2=2\pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{\sin\theta_2}{\cos^3\theta_2}d\theta_2$.

由 $do=2\pi\sin\chi d\chi$, 得: $do_2=2\pi\sin\theta_2 d\theta_2$, 即 $d\theta_2=\frac{do_2}{2\pi\sin\theta_2}$.

由 $d\sigma_2=2\pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{\sin\theta_2}{\cos^3\theta_2}d\theta_2$, 得: $d\sigma_2=\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{do_2}{\cos^3\theta_2}$.

[**入射粒子的有效散射截面**] 入射粒子的有效散射截面非常复杂, 但在两种特殊质量情况下有 $d\sigma_1=\begin{cases}\left(\frac{\alpha}{4E_1}\right)^2\frac{do_1}{\sin^4\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}, m_1<<m_2\\ \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2\frac{\cos\theta_1}{\sin^4\theta_1}do_1, m_1=m_2\end{cases}$. 其中, m_2 是散射粒子 (力心), m_1 是被散射粒子 (运动粒子).

当 $m_2>>m_1$ 时, 有 $\chi\approx\theta_1, m\approx m_1$.

由 $d\sigma=\left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2\frac{do}{\sin^4\left(\frac{\chi}{2}\right)}$, 得: $d\sigma_1=\left(\frac{\alpha}{4E_1}\right)^2\frac{do_1}{\sin^4\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}$.

当 $m_1=m_2$, 约化质量 $m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}=\frac{m_1}{2}$.

由 $\theta_1=\frac{\chi}{2}$ 得: $\chi=2\theta_1$. 由 $d\sigma=\pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^3\frac{\chi}{2}}d\chi$, 得: $d\sigma_1=2\pi\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2\frac{\cos\theta_1}{\sin^3\theta_1}d\theta_1$.

由 $do=2\pi\sin\chi d\chi$, 得: $do_1=\pi\sin\theta_1 d\theta_1$, 即 $d\theta_1=\frac{do_1}{2\pi\sin\theta_1}$.

带入 $d\sigma_1=2\pi\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2\frac{\cos\theta_1}{\sin^3\theta_1}d\theta_1$, 得: $d\sigma_1=\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2\frac{\cos\theta_1}{\sin^4\theta_1}do_1$.

[**两个全同粒子的有效散射截面**] $d\sigma=\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2\left(\frac{1}{\cos^4\theta}+\frac{1}{\sin^4\theta}\right)\cos\theta do$.

对于两个全同粒子, 散射粒子与被散射粒子等效, 所以 $d\sigma=d\sigma_1+d\sigma_2$.

由 $d\sigma_2=\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{do_2}{\cos^3\theta_2}$ 和 $d\sigma_1=\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2\frac{\cos\theta_1}{\sin^4\theta_1}do_1$, 得: $d\sigma=\left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2\left(\frac{1}{\cos^4\theta}+\frac{1}{\sin^4\theta}\right)\cos\theta do$.

[**散射粒子依赖碰撞中能量损失的分布**] 散射质点所获得的速度在 C 系中的散射角为 $v_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_\infty\sin\frac{\chi}{2}$, 粒子所获得的能量为 $\varepsilon=\frac{m_2v_2'^2}{2}=\frac{2m^2}{m_2}v_\infty^2\sin^2\frac{\chi}{2}$, 有效截面对损失能量的关系 $d\sigma=2\pi\frac{\alpha^2}{m_2v_\infty^2}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}$, 损失能量的范围 $\varepsilon\in[0,\varepsilon_{max}]=\left[0,\frac{2m^2v_\infty^2}{m_2}\right]$.

由 $v_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_\infty\sin\frac{\chi}{2}$ 和 $\varepsilon=\frac{1}{2}m_2v_2'^2$, 得: $\varepsilon=\frac{2m_1^2m_2}{(m_1+m_2)^2}v_\infty^2\sin^2\frac{\chi}{2}$.

由 $m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$, 得: $\varepsilon=\frac{2m^2}{m_2}v_\infty^2\sin^2\frac{\chi}{2}$, 即 $\sin^2\frac{\chi}{2}=\frac{m_2\varepsilon}{2m^2v_\infty^2}$.

由 $d\sigma=\pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^3\frac{\chi}{2}}d\chi$, 得: $d\sigma=2\pi\frac{\alpha^2}{m_2v_\infty^2}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2}$.

[**小角度散射**] 当瞄准距离很大时, 力场 U 很弱, 因而偏转角很小, 偏转角 $\theta_1 \approx \sin\theta_1$. 此时, 散射角 $\theta_1 \approx -\frac{2\rho}{m_1 v_\infty^2}\int_\rho^\infty \frac{dU}{dr}\frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}}$, 有效散射截面 $d\sigma = \left|\frac{d\rho}{d\theta_1}\right| \frac{\rho(\theta_1)}{\theta_1} do_1$.

设粒子初始速度 $\vec{v}_\infty$ 沿 x 轴. 粒子散射前后偏转角足够小 $\theta_1 \approx \sin\theta_1$, 速度改变量足够小 $dt \approx \frac{dx}{v_\infty}$, 粒子运动轨迹近似为直线 $\rho \approx y$.

粒子偏转角满足 $\sin\theta_1 = \frac{\vec{p}'_{1y}}{\vec{p}'_1} \approx \theta_1$, 得: $p'_{1y} = m_1 v_\infty \theta_1$.

由 $\dot{\vec{p}}_y = \vec{F}_y$, 得: $\vec{p}'_{1y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}_y dt$.

由 $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{y}{r}\frac{\partial U}{\partial r} \approx -\frac{\rho}{r}\frac{\partial U}{\partial r}$.

由 $dt \approx \frac{dx}{v_\infty}$, 得: $p'_{1y} \approx \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\rho}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\frac{dx}{v_\infty} = -\frac{\rho}{v_\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}dx$.

由 $r^2 = x^2 + y^2 \approx x^2 + \rho^2$, 得: $dx \approx \frac{r}{\sqrt{r^2-\rho^2}}dr$, 则 $p'_{1y} \approx -\frac{2\rho}{v_\infty}\int_\rho^\infty \frac{1}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\frac{\partial U}{\partial r}dr$.

由 $\theta \approx \frac{p'_{1y}}{m_1 v_\infty}$, 得: $\theta_1 \approx -\frac{2\rho}{m_1 v_\infty^2}\int_\rho^\infty \frac{1}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\frac{\partial U}{\partial r}dr$.

由 $d\sigma = |2\pi\rho d\rho| = 2\pi\rho\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| d\chi$ 和 $\theta_1 = \frac{\chi}{2}$, 得: $d\sigma = 2\pi\rho\left|\frac{d\rho}{d\theta_1}\right| d\theta_1$.

由 $do_1 = 2\pi\sin\theta_1 d\theta_1$, 得: $d\sigma = \rho\left|\frac{d\rho}{d\theta_1}\frac{do_1}{\sin\theta_1}\right| \approx \frac{\rho}{\theta_1}\left|\frac{d\rho}{d\theta_1}\right| do_1$.