流形

1. 流形: 设 M 是一个 Hausdorff 空间; $\forall p \in M$, 如果存在一个开邻域 $O: p \in O$ 与 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 中的一个开集同胚, 就称 M 为实或复的 $n-$ 维流形;

2. 微分流形: 设 M 是一个流形, 若同时满足:

   (a) 存在开覆盖 $\{U_i | i \in I\}, \varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i) \in R^n, \varphi^{-1} : \varphi_i(U_i) \to U_i \subset M$;

   (b) 当 $U_i \cap U_j \neq \phi$, 下列映射是 C^∞ 可微的: $\psi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$;

3. 等价关系: 关系 $A \sim B$ 是一个等价关系, 若同时满足:

   (a) 自反性: $A \sim A$;

   (b) 对称性: $A \sim B, B \sim A$;

   (c) 传递性: $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$;

4. 坐标卡: (U_i, φ_i) 给出微分流形的坐标卡;

   (a) 卡集: 坐标卡的全体称为卡集;

   (b) 坐标邻域: $p \in U_i$, 则 U_i 为在 p 点的坐标邻域;

   (c) 坐标函数: φ_i, 坐标函数在 p 点处的值记为 $x^\mu(p)$,$1 \leq \mu \leq n$;

   (d) 卡集相容: 如果两个卡集的并仍然是卡集, 则称它们相容;

      i. 相容性是一种等价关系;

5. $\mathbb{R}^n$ 上的 $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ 到 n 维单位球面 $S^n : \{x_i \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ 上 $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})$ 的球极投影:

   (a) 自北极 $(0, 0, ..., 0, 1)$ 的 (南多半球) 球极投影: $y_i = \frac{x_i}{1 - x_{n+1}}, ||y||^2 = \frac{1 + x_{n+1}}{1 - x_{n+1}}, x_i = \frac{2y_i}{||y||^2 + 1}, x_{n+1} = \frac{||y||^2 - 1}{||y||^2 + 1}$;

      i. 南多半球: $U_+ = S^n \backslash \{(0, 0, ..., 0, -1)\} = \{(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} \in S^n | x_{n+1} \neq -1)\}$;

      ii. $(U_\pm, \varphi_\pm)$ 坐标函数: $\varphi_+ : U_+ \to \mathbb{R}^n, (x_1, ..., x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, ..., \frac{x_n}{1 + x_{n+1}}\right)$;

   (b) 自南极 $(0,0,...,0,-1)$ 的 (北多半球) 球极投影: $y_i=\frac{x_i}{1+x_{n+1}}, ||y||^2=\frac{1-x_{n+1}}{1+x_{n+1}}, x_i=\frac{2y_i}{||y||^2+1}, x_{n+1}=\frac{1-||y||^2}{1+||y||^2}$;
      i. 北多半球: $U_-=S^n\backslash\{(0,0,...,0,+1)\}=\{(x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1}\in S^n|x_{n+1}\neq 1)\}$;
      ii. $(U_\pm,\varphi_\pm)$ 坐标函数: $\varphi_-:U_-\to\mathbb{R}^n,(x_1,...,x_{n+1})\mapsto\left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},...,\frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$;

6. 等价类: 满足同样等价关系的一类关系;

   (a) 微分结构: M 所有卡集按照等价类可划分为不同的类, 每个类对应一个微分结构; 即相容的卡集定义了 M 上相同的微分结构;

7. 齐次坐标: 在 n 维实射影空间 $\mathbb{R}P^n$ 中, 由 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中所有过原点的直线 $(x^0,x^1...,x^n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ 且 $(x^0,x^1...,x^n)\neq(0,0,...,0)$, 则称该直线为 $\mathbb{R}P^n$ 的齐次坐标;

   (a) 非齐次坐标: 设 U_i 为所有过原点的齐次坐标 $x^i\neq 0$ 的直线集, 定义非齐次坐标 $\xi^j_{(i)}=\frac{x^j}{x^i}$, 即 $\xi_{(i)}=(\xi^0_{(i)},\xi^1_{(i)},...,\xi^{i-1}_{(i)},\xi^{i+1}_{(i)},...,\xi^n_{(i)})$. 其中 $\xi^i_{(i)}=1$ 被省略;
      i. U_i 中的非齐次坐标实际与齐次坐标的选择无关: 若 $x=\lambda y$, 则有 $\frac{x^j}{x^i}=\frac{y^j}{y^i}=\xi^j_{(i)}$;
      ii. 非齐次坐标提供了 U_i 与 $\mathbb{R}^n$ 之间的同胚 $\varphi_i:U_i\to\mathbb{R}^n$;

   (b) 卡集 $\{U_i|0\leq i\leq n\}$ 的转移函数 ψ_{ij}: 当 $U_i\cap U_j\neq\phi$,
   $$x=(x^0,...,x^n)\in U_i\cap U_j\begin{cases}\varphi_i(x)=\xi_{(i)}\in\varphi_i(U_i\cap U_j)\\ \varphi_j(x)=\xi_{(i)}\in\varphi_j(U_i\cap U_j)\end{cases}$$
   $$\psi_{ij}=\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}:\xi^k_{(j)}\mapsto\xi^k_{(i)}=\frac{x^j}{x^i}\cdot\xi^k_{(j)}$$
      i. 转移函数 ψ_{ij} 与 $U_i\cap U_j$ 中点的齐次坐标的选择无关: $x=\lambda y\Rightarrow\frac{x^j}{x^i}=\frac{y^j}{y^i}$;

8. 一般线性群: n 维一般线性群是 $n\times n$ 维可逆矩阵的集合, 记为 $GL(n,\mathbb{R})$;

9. 笛卡尔积: $X\times Y=\{(x,y)|x\in X\bigwedge y\in Y\}$;

10. 流形的乘积: 设 $M,\tilde{M}$ 分别为 $n,\tilde{n}$ 维微分流形, 各自定义了坐标卡集 $\{(U_i,\varphi_i)\},\{(\tilde{U}_\alpha,\tilde{\varphi}_\alpha)\}$. 则乘积流形 $M\times\tilde{M}$ 是一个 $n+\tilde{n}$ 维微分流形, 卡集为 $\{U_i\times\tilde{U}_\alpha,(\varphi_i,\tilde{\varphi}_\alpha)\}$;

11. 环面: $T^n = S^1 \times S^1 \times ... \times S^1$;
12. 封闭群的要素:
    (a) 单位元: I;
    (b) 逆元: 元 A 与其逆元 A^{-1} 之集为单位元 I;
    (c) 满足结合律的乘法 $< u, v >$: 在该乘法下, 构成封闭群;
13. 矩阵构成的李群:
    (a) 一般线性群 $GL(n, \mathbb{C})$;
    (b) 幺正群 $U(n)$ 和 $U(p, q)$: 保持 $n-$ 维复向量空间 $V \cong \mathbb{C}^n$ 的内积不变的变换;
        i. $< u, v >= \bar{u}^T \cdot v = \sum\limits_{j=1}^{n} \bar{u}_j v^j$;
        ii. $< u, v >_{p,q} = -\sum\limits_{i=1}^{p} \bar{u}_i v^i + \sum\limits_{j=1}^{q} \bar{u}_{p+j} v^{p+j}$;
    (c) 特殊幺正群 $SU(p, q) = U(p, q) \cap SL(n, \mathbb{C})$;
    (d) 正交群 $O(n)$: 在实数集上保持欧几里得内积不变的变换;
    (e) 特殊正交群 $SO(p, q) = O(p, q) \cap SL(n, \mathbb{R})$;
    (f) 辛群 $Sp(2n, \mathbb{C})$: 保持向量 $y, z \in \mathbb{C}^{2n}$ 或 $\mathbb{R}^{2n}$ 的斜积 $\omega(y, z)$ 不变的变换:
        i. $\omega(w, z) = \sum\limits_{j=1}^{n} (w_j z'_j - w'_j z_j)$;
    (g) 幺正辛群 $USp(2n) = Sp(2n, \mathbb{C}) \cap U(2n)$;
14. 矩阵的指数映射: 设 A 是 $n \times n$ 矩阵, 指数 e^A 来自幂级数 $e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + ... = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$;
15. Pauli 矩阵: $\sigma_k = \begin{pmatrix} \delta_{a3} & \delta_{a1} - i\delta_{a2} \\ \delta_{a1} + i\delta_{a2} & -\delta_{a3} \end{pmatrix}, k = 0, 1, 2, 3$;
16. Lie 群流形: $(\xi_a)_{a=1,\ldots,dimG} \in \mathbb{R}^{dimG}$, 通过指数映射 $g = \exp\left(i \sum\limits_{a=1}^{dimG} \xi_a T^a\right) \in G, T^a \in g$;