流形上的微积分

1. 流形间的光滑映射: 微分流形维数 $dimM = m, dimN = n$, 映射 $f : M \to N$ 的坐标表达满足: M 的卡集 $\{U_i, \varphi_i\}$, N 的卡集 $\{V_j, \psi_j\}$, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$;

   (a) 简化记号: $y = f(x) = \psi \circ f \circ \psi^{-1}(x)$;

   (b) 光滑映射条件: 若从 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射 $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ 是 $\mathbb{C}^\infty$ 的, 则称 f 为可微映射 (或光滑映射);

   (c) 可微性与坐标系的选择无关;

2. 微分同胚映射: 设 $f : M \to N$ 是流形之间的同胚映射, 若 $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ 及 $x = \varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(y)$ 均是 $\mathbb{C}^\infty$, 则 f 是从 M 到 N 的微分同胚映射;

   (a) 微分同胚的流形: 设 $f : M \to N$ 是流形之间的微分同胚映射, 则 M, N 称为微分同胚的流形, 记为 $M \cong N$;

   (b) 微分同胚是一种等价关系;

   (c) M 到自身的微分同胚映射 $f : M \to M$ 记作 $Diff(M)$;

3. 李群: 若流形 G 为光滑流形, 且乘法和逆运算都是光滑映射 $m : G \times G \to G, m(g, h) := gh, i : G \to G, i(g) = g^{-1}$;

   (a) 等价命题: 设 G 是具有群结构的光滑流形, 如果映射 $f : G \times G \to G, (g, h) \mapsto gh^{-1}$ 是光滑的, 则 G 构成李群;

   (b) 左作用与右作用: $L_g, R_g : G \to G, L_g(g) = gh, R_g(h) = hg$;

4. 光滑映射 (函数): M 上的函数 f 定义为从 M 到 $\mathbb{R}$ 的光滑映射, 在坐标卡 (U, φ) 上, 函数 f 的局部表达为 $m-$ 变元的实值函数 $f \circ \varphi^{-1} : R^m \to R$;

   (a) 光滑函数全体以 $\mathcal{F}(M)$ 记;

5. 切向量: M 上的向量由某条曲线 $c : (a, b) \to M$ 的切向描述. 设 $f : M \to \mathbb{R}$ 是光滑函数, f(c(t)) 定义了函数 $(a, b) \to \mathbb{R}$. 在 $t = 0 \in (a, b)$ 处, 函数 $f(c(t))$ 的变化率为 $\frac{df(c(t))}{dt}|_{t=0} = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(c(t))}{dt}|_{t=0}$(为了方便, 可以滥用记号 $\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^\mu}$ 为 $\frac{df}{dx^\mu}$);

(a) 函数空间上的微分算子: 作用在函数上的微分算子定义为 $X \equiv X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, 其中 $X^\mu = \frac{dx^\mu(c(t))}{dt}|_{t=0}$. 变化率可以记为 $\frac{df(c(t))}{dt}|_{t=0} = X^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = X[f]$;

   i. 微分算子 $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 定义了曲线 $c(t)$ 在点 $p = c(0) \in M$ 处的切向量;

   ii. $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 可以作为向量的基, X^μ 为切向量在这个基底下的分量;

(b) 曲线与切向量之间的对应是多对一的: 若 $c_1(t), c_2(t)$ 由相同的初始值 $(c_1(0) = c_2(0) = p)$ 和变化率 $(\frac{dx^\mu(c_1(t))}{dt}|_{t=0} = \frac{dx^\mu(c(t))}{dt}|_{t=0})$, 则它们定义的切向量相同;

   i. 切空间: M 中过 p 点的曲线的等价类 $1:1$ 对应于 p 处的一个切向量, 其全体构成切空间 T_pM;

   ii. 切空间的基: $e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, 1 \le \mu \le m$ 是 T_pM 的一组基 (坐标基), 有 $\dim T_pM = \dim M$;

(c) 切向量的构造与坐标系的选择无关: 设 $p \in U_i \cap U_j$ 的坐标为 $x^\mu = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \tilde{X}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} \Rightarrow X^\nu \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}$;

   i. 不同坐标系下的微分算子相差一个雅可比矩阵;

6. 基变换: 利用矩阵 $A = (A_i^\mu) \in GL(m, \mathbb{R})$, 可以定义基变换 $e_\mu \to \hat{e}_i = A_i^\mu e_\mu$. 其中 $\hat{e_\mu}$ 为非坐标基;

7. 线性泛函: 对于线性泛函 $f \in V$, $f(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$;

8. 对偶空间: 实向量空间 V 的对偶空间 V^* 定义为线性泛函 $f : V \to \mathbb{R}$ 的全体. 任意 $f \in V^*$ 完全由它在 V 中的某组基 e_i 上的值 $f(e_i)$ 确定, $v = \sum\limits_i \lambda^i e_i \Rightarrow f(v) = \sum\limits_i \lambda^i f(e_i)$, f 与 $\{f(e_i)\}$ 处于同一等价类;

(a) 对偶基: 设 $e^i \in V^*$ 满足 $e^i(e_j) = \delta^i_j$, 则任意 $f \in V^*$ 可写成 e^i 的线性组合, 故 $\{e^i\}$ 形成 V^* 的基, 称为 e_i 的对偶基, $\bar{f} = \sum\limits_j f(e_j) e^j \Leftrightarrow \bar{f}(e_i) = \sum\limits_j f(e_i)\delta^j_i = f(e_i) \Leftrightarrow \bar{f} = f, \dim V^* = \dim V$;

(b) 内积空间 V, e_i 具有幺正性 $< e_i, e_j >= \delta_{ij} \Rightarrow < e_i, \cdot >= e^i(\cdot)$;

9. 余切空间: 切空间 T_pM 的对偶空间 T_p^*M 称为余切空间;

(a) 切空间中坐标基 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 的对偶基记作 $dx^\mu, dx^\mu(\frac{\partial}{\partial x^\nu}) =< dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} >= \delta^\mu_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}$;

i. 对偶基可以作为微分: $< df, \frac{\partial}{\partial x^\nu} >=< \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} >= \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \Rightarrow < df, X >= X[f]$;

(b) 余切空间中的任一元可写成微分 $1-$ 形式 $\omega = \omega_\mu dx^\mu, < \omega, X^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} >= \omega_\mu X^\mu$;

(c) 余切空间的元 ω 无需参考任何坐标系: 设 $p \in U_i \cap U_j$, $\omega = \omega_\mu dx^\mu = \tilde{\omega}_\nu dy^\nu \Rightarrow \tilde{\omega}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \omega_\mu$;

i. 不同坐标系下余切空间的元 ω 差一个雅可比矩阵的“逆矩阵”;

10. 张量积: 向量空间 V, W 的张量积 $V \otimes W$ 可以看作 $V \times W$ 模去一组等价关系: 设 $(v, w) \in V \times W$, 等价关系 $\begin{cases} (v_1 + v_2, w) \sim & (v_1, w) + (v_2, w) \\ (v, w_1 + w_2) \sim & (v, w_1) + (v, w_2) \\ \lambda \cdot (v, w) = & (\lambda \cdot v, w) = (v, \lambda \cdot w) \end{cases}$, 则张量积定义为 $V \otimes W \equiv V \times W / \sim$;

(a) 张量积 $V \otimes W$ 中元素 $v \otimes w$ 的性质: $\begin{cases} (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \otimes w = & \lambda_1 (v_1 \otimes w) + \lambda_2 (v_2 \otimes w) \\ v \otimes (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = & \lambda_1 (v \otimes w_1) + \lambda_2 (v \otimes w_2) \end{cases}$;

(b) 若 e_i, f_α 分别构成 V, W 的基, 则 $e_i \otimes f_\alpha$ 构成 $V \otimes W$ 的基, 故 $\dim V \otimes W = \dim V \otimes \dim W$;

11. $(q, r)-$ 型张量空间: 在 $p \in M$ 点处的 $(q, r)-$ 型张量空间定义为:$T_p(M)^q_r = \otimes_q T_p(M) \otimes_r T^*_p(M), T \in T_p(M)^q_r \Rightarrow T^{\mu_1 \dots \mu_q}_{\nu_1 \dots \nu_r} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes ... \otimes dx^{\nu_r}$;

(a) 张量 T 在坐标变换 $x^\mu \to y^\mu = y^\mu(x)$ 下是协变的;

(b) 向量场: 当点 p 在 M 中变动, 若相应的向量 V 光滑地变动, 就称 V 是 M 上的一个向量场; $\forall f \in \mathcal{F}(M) \Rightarrow V[f] \in \mathcal{F}[M]$;

i. 向量场 X 在 p 点处的值 $X|_p \in T_p(M)$;

(c) $(q, r)-$ 型张量场: $(q, r)-$ 型张量场的全体记作 $T^q_r(M)$;

12. 微分映射: 光滑映射 $f : M \to N$ 诱导的微分映射 (push forward)$f_* : T_p M \to T_{f(p)} N$. 若 $\forall g \in \mathcal{F}[N], g \circ f \in \mathcal{F}[M], \forall V \in T_p(M), V[g \circ f] \in \mathbb{R}$, $(f_* V)[g] \equiv V[g \circ f]$(即取坐标卡 $(U, \varphi), (V, \psi)$), 则 $(f_* V)[g \circ \psi^{-1}(y)] = V[g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)]$(即设 $\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \psi(f(p)) \end{cases}$). 其中 $V \equiv V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $f_* V \equiv W^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \Rightarrow W^\alpha = V^\mu \frac{\partial y^\alpha(x)}{\partial x^\mu} (g = y^\alpha)$;

(a) 微分映射对高阶逆变张量的作用: 对于 $f_*: \mathcal{T}_p(M)^q_0 \to \mathcal{T}_{f(p)}(N)^q_0$, $T = T^{\mu_1\cdots\mu_q}\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} \in \mathcal{T}_p(M)^q_0$, 则 $f_*T = (f_*T)^{\alpha_1\cdots\alpha_q}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial y^{\alpha_q}} \in \mathcal{T}_{f(p)}(N)^q_0$, $(f_*T)^{\alpha_1\cdots\alpha_q} = T^{\mu_1\cdots\mu_q}\frac{\partial y^{\alpha_1}(x)}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial y^{\alpha_q}(x)}{\partial x^{\mu_q}} \in \mathcal{T}_{f(p)}(N)^q_0$;

(b) 微分映射的链式法则 (流形上): 若 $f: M \to N, g: N \to P$ 是流形 M, N, P 之间的光滑映射, 则复合 $g \circ f: M \to P$ 的微分映射具有链式, 则 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$;

   i. 若用 $x^\mu, y^\alpha, z^\lambda$ 分别表示 $p \in M, f(p) \in N, g(f(p)) \in P$ 的坐标, 则 $((g \circ f)_*V)^\lambda = \frac{\partial z^\lambda(y(x))}{\partial x^\mu}V^\mu = \frac{\partial z^\lambda}{\partial y^\alpha}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}V^\mu = \frac{\partial z^\lambda}{\partial y^\alpha}(f_*V)^\alpha$;

13. 光滑映射诱导的拉回映射: 映射 $f: M \to N$ 自然诱导出另一个 (方向相反的) 拉回映射 (pull back)$f^*: T^*_{f(p)}N \to T^*_pM$, $< f^*\omega, V > \equiv < \omega, f_*V >$;

   (a) 拉回映射对高阶协变张量的作用: 对于 $f^*: \mathcal{T}_{f(p)}(N)^0_r \to \mathcal{T}_p(M)^0_r$, 其分量形式 $(f^*T)_{\mu_1\ldots\mu_r} = T_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial x^{\mu_r}}$;

   (b) 拉回映射的分量形式: $(f^*\omega)_\mu V^\mu = \omega_\alpha(f_*V)^\alpha = \omega_\alpha\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}V^\mu$, 即 $(f^*\omega)_\mu = \omega_\alpha\frac{\partial y^\alpha(x)}{\partial x^\mu}$;

   (c) 映射法则: $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$;

14. 微分映射和拉回映射推广到 $(q, r)-$ 型张量: 一般而言, f_* 和 f^* 不能推广到混合的 $(q, r)-$ 型张量. 但是当 $N = M$, $f \in Diff(M)$ 时, 因为 f^{-1} 存在且可微, Jacobian 矩阵可逆, f_* 和 f^* 描述张量在主动坐标变换下的协变性;

15. 子流形: 设 $f: M \to N$ 光滑, $\dim M \leq \dim N$;

   (a) 浸入: 称 f 为 M 在 N 中的浸入, 当 $f_*: T_pM \to T_{f(p)}N$ 是单射, 即 Jacobian 矩阵是满秩的 ($rank f_* = \dim M$);

   (b) 嵌入: 若 f 本身也是单射, 则称 M 为 N 的嵌入, 此时 $f(M)$ 为 N 的子流形;

16. 积分曲线: 任取 M 上的向量场 $X \in \chi(M)$, 该向量场积分曲线 $x(t)$ 定义为 $x = x(t)$ 处的切向量恰为 $X|_x$, 在坐标卡 (U, φ) 中用分量表示为 $\frac{dx^\mu(t)}{dt} = X^\mu(x(t))$;

   (a) 集分曲线的初始位置记为 $x^\mu_0 = x^\mu(0)$;

(b) 过给定点的积分曲线存在且唯一: 以 $\sigma(t,x_0)$ 表示 $t=0$ 时初始位置为 x_0 的积分曲线, 则 $\begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma^\mu(t,x_0)=X^\mu(\sigma(t,x_0)) \\ \sigma^\mu(0,x_0)=x_0^\mu \end{cases}$, 由一阶常微分方程组解的性质, 可知过给定点的积分曲线是存在且唯一的;

i. 积分曲线满足 $\sigma(t,\sigma^\mu(s,x_0))=\sigma(s+t,x_0^\mu)$;

(c) 流: 映射 $\sigma:\mathbb{R}\times M\to M$ 定义了向量场 $X\in\chi(M)$ 的流;

(d) 微分同胚 (由积分曲线定义): 固定 $t\in\mathbb{R}$ 时, $\sigma_t(x)\equiv\sigma(t,x)$ 定义了微分同胚 $\sigma_t:M\to N$, 即 $\begin{cases} \sigma_t(\sigma_s(x))=\sigma_{t+s}(x) \quad \Rightarrow \sigma_t\circ\sigma_s=\sigma_{t+s} \\ \sigma_0=Id \\ \sigma_{-t}=(\sigma_t)^{-1} \end{cases}$;

17. 单参数子群: $\{\sigma_t|t\in\mathbb{R}\}$ 构成 $\mathrm{Diff}(M)$ 的交换子群, 称为单参数子群;

18. 无穷小变换: $\sigma_\varepsilon^\mu(x)\approx x^\mu+\varepsilon\frac{d\sigma_t^\mu(x)}{dt}|_{t=0}=x^\mu+\varepsilon X^\mu(x)$;

(a) 无穷小生成元: 向量场 $X=X^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 构成变换 σ_t 的无穷小生成元;

19. 向量场的流: 给定向量场 X, 与之对应的流 σ 可通过指数映射得到, $\sigma^\mu(t,x)=x^\mu+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\left(\frac{d}{ds}\right)^n\sigma^\mu(s,x)\big|_{s=0}=x^\mu+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}X^n x^\mu\big|_{s=0}=\exp(tX)x^\mu$;

(a) 流的性质: $\begin{cases} \sigma^\mu(0,x)=\exp(0\cdot X)x^\mu=x^\mu \\ \frac{d\sigma^\mu(t,x)}{dt}=X\exp(tX)x^\mu=\frac{d}{dt}[\exp(tX)x^\mu] \\ \sigma(s,\sigma(t,x))=\sigma(s,\exp(tX)x)=\exp(sX)\exp(tX)x=\exp((s+t)X)x=\sigma(s+t \end{cases}$

(b) 向量场生成的流: 设 $\sigma(t,x),\tau(t,x)$ 是由向量场 X,Y 生成的流, 则 $\frac{d\sigma^\mu(s,x)}{ds}=X^\mu(\sigma(s,x))$, $\frac{d\tau^\mu(t,x)}{dt}=Y^\mu(\tau(t,x))$;

20. Lie 导数: 设 $Y|_x\in T_xM$ 可以沿 $\sigma(s,x)$ 到临近点 $x'=\sigma_\varepsilon(x), Y|_{\sigma_\varepsilon(x)}\in T_{\sigma_\varepsilon(x)}M$, 则 Lie 导数描述 Y 的变化为 $\mathcal{L}_XY=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\left[(\sigma_{-\varepsilon})_*Y|_{\sigma_\varepsilon(x)}-Y|_x\right]$;

(a) Lie 导数的坐标表示: 在坐标卡 (U,φ) 中考虑分量 $\sigma_\varepsilon^\mu(x)=x^\mu+\varepsilon X^\mu(x)$, 经过无穷小变换后, 用 $(\sigma_{-\varepsilon})_*$ 映回 x 处, 代入 Lie 导数得到 $\mathcal{L}_XY=[X^\mu(x)\partial_\mu Y^\nu(x)-Y^\mu(x)\partial_\mu X^\nu(x)]e_\nu|_x$;

(b) Lie 括号: 向量场 $X=X^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $Y=Y^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 的 Lie 括号定义为 $[X,Y]\equiv XY-YX=[X^\mu(x)\partial_\mu Y^\nu(x)-Y^\mu(x)\partial_\mu X^\nu(x)]e_\nu|_x$;

i. 尽管 XY, YX 是二阶微分算子, 但其差仍然为一阶算子, 因而仍是向量场;

ii. 向量场在 Lie 括号运算下封闭:

A. 双线性: $\begin{cases}[X, c_1Y_1 + c_2Y_2] = c_1[X, Y_1] + c_2[X, Y_2] \\ [c_1X_1 + c_2X_2, Y] = c_1[X_1, Y] + c_2[X_2, Y]\end{cases}$;

B. 斜对称性: $[X, Y] = -[Y, X]$;

C. Jacobi 恒等式: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$;

(c) 链式法则: 设 $X, Y \in \chi(M), f : M \to N$, 则 $f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]$;

i. Lie 导数描述了两个流的非对易性质: $\tau^\mu(\delta, \sigma(\varepsilon, x)) - \sigma^\mu(\varepsilon, \tau(\delta, x)) = \varepsilon\delta[X, Y]^\mu$;

(d) 对易: $\mathcal{L}_XY = [X, Y] = 0 \Leftrightarrow \sigma(s, \tau(t, x)) = \tau(t, \sigma(s, x))$;

(e) 微分 1− 形式 $\omega \in \Omega^{-1}(M)$ 的 Lie 导数 $\mathcal{L}_X\omega \equiv \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[(\sigma_\varepsilon)^*\omega|_{\sigma_\varepsilon(x)} - \omega|_x\right]$, 令 $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ 则可展开为 $\mathcal{L}_X\omega = (X^\nu\partial_\nu\omega_\mu + \partial_\mu X^\nu\omega_\nu)dx^\mu$;

(f) 对标量函数 $f \in \mathcal{F}(M)$ 的 Lie 导数 $\mathcal{L}_Xf \equiv \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}[f(\sigma_\varepsilon(x)) - f(x)] = X^\mu(x)\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = X[f]$;

(g) 对一般张量场的 Lie 导数 $\mathcal{L}_X(Y \otimes \omega) = Y \otimes (\mathcal{L}_X\omega) + (\mathcal{L}_XY) \otimes \omega$;

21. 爱尔兰根纲领: 利用群理论和仿射几何对几何学进行形式化;

22. 微分形式: 设 $\omega \in T_p(M)^0_r$ 是 $r-$ 阶协变张量, P 是 r 个元素的重排 $P\omega(V_1, ..., V_r) = \omega(V_{P(1)}, ..., V_{P(r)})$, 即对 $\omega(e_{\mu_1}, ..., e_{\mu_1}) = \omega_{\mu_1\mu_2\dots\mu_r}$ 有 $P\omega(e_{\mu_1}, ..., e_{\mu_1}) = \omega_{\mu_{P(1)}\dots\mu_{P(r)}}$. 在 M 空间中 $r-$ 阶协变张量 ω 在 p 点的微分形式全体记为 $\Omega^r_p(M)$;

(a) 对称化: $S\omega = \frac{1}{r!}\sum\limits_{P\in S_r} P\omega$, 反对称化: $A\omega = \frac{1}{r!}\sum\limits_{P\in S_r} \mathrm{sgn}(P)P\omega$;

23. 楔积: 对于 2− 形式的切矢量基有 $dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu$, 推广到 $r-$ 形式 $dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r} = \sum\limits_{P\in S_r} \mathrm{sgn}(P)dx^{\mu_{P(1)}} \otimes ... \otimes dx^{\mu_{P(r)}}$;

(a) 张量场分量的楔积表示: $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\mu_2\dots\mu_r}dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}$;

(b) 楔积的性质:

i. 若指标值有相重复, 则楔积为 0;

ii. 楔积的指标经过重排, 则出现排列的符号因子 $\mathrm{sgn}(P)$;

iii. 楔积对每个因子都是线性的;

(c) 微分形式的维数: 对 $\omega \in \Omega_p^r(M)$ 的独立分量的个数为 $C_m^r = \frac{m!}{r!(m-r)!}$, 所以 $\dim \Omega_p^r(M) = \frac{m!}{r!(m-r)!} = \dim \Omega_p^{m-r}(M)$;

24. 外积: 由楔积定义映射 $\wedge : (\omega,\xi) \in \Omega_p^q(M) \times \Omega_p^r(M) \to \omega \wedge \xi \in \Omega_p^{q+r}(M)$, 其运算定义为 $(\omega\wedge\xi)(V_1,...,V_{q+r}) = \frac{1}{q!r!} \sum\limits_{P\in S_{q+r}} \mathrm{sgn}(P) \times \omega(V_{P(1)},...,V_{P(q)}) \cdot \xi(V_{P(q+1)},...,V_{P(q+r)})$;

   (a) 分量形式: 对于张量场 $\begin{cases} \omega = \frac{1}{q!}\omega_{\mu_1...\mu_q} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_q} \\ \xi = \frac{1}{r!}\xi_{\mu_{q+1}...\mu_{q+r}} dx^{\mu_{q+1}} \wedge ... \wedge dx^{\mu_{q+r}} \end{cases}$,
   外积运算可表示为分量形式 $(\omega\wedge\xi)_{\mu_1...\mu_{q+r}} = \frac{(q+r)!}{q!r!}\omega_{\mu_1...\mu_q}\xi_{\mu_{q+1}...\mu_{q+r}}$;

   (b) 结合律: $\forall \xi,\eta,\omega \in \Omega_p^*(M)$, 有 $(\xi\wedge\eta)\wedge\omega = \xi\wedge(\eta\wedge\omega)$;

   (c) $qr-$ 律: $\forall \xi \in \Omega_p^q(M), \eta \in \Omega_p^r(M)$, 有 $\xi\wedge\eta = (-1)^{qr}\eta\wedge\xi$;

      i. 奇形式 ξ,η 的外积反对易, $(-1)^{qr} = -1 \Rightarrow \xi\wedge\eta = 0$;

      ii. 偶形式 ξ 与任何形式的 η 的外积对易, $\xi\wedge\eta = \eta\wedge\xi$;

25. 外代数: 微分形式全体在向量空间的运算和外积运算下形成外代数 $\Omega_p^*(M) = \otimes_{r=0}^m \Omega_p^r(M)$;

26. 外导数 (外微分): 作用在 $r-$ 形式上外导数 $d_r : \Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)$ 定义为 $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1...\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r} \in \Omega^r(M) \Rightarrow d\omega = d_r\omega = \frac{1}{r!}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\omega_{\mu_1...\mu_r}\right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}$;

   (a) 莱布尼兹法则: 设 $\xi \in \Omega^q(M), \eta \in \Omega^r(M)$, $d(\xi\wedge\eta) = d\xi\wedge\eta + (-1)^q \xi\wedge d\eta$;

      i. 幂零性: $d^2 = 0$, 即 $d_{r+1}d_r = 0$;

      ii. 设 f^* 是协变张量的 pull-back:

         A. $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$;

         B. $f^*(\xi\wedge\eta) = (f^*\xi)\wedge(f^*\eta)$;

   (b) 其他性质: 对于 $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, Y = Y^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in \mathcal{X}(M), \omega = \omega_\mu dx^\mu \in \Omega^1(M)$, 有 $d\omega(X,Y) = X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega([X,Y])$;

      i. 对于 $r-$ 形式: $d\omega(X_1,...,X_{r+1}) = \sum\limits_{i=1}^r (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1,...,\hat{X}_i,...,X_{r+1}) + \sum\limits_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i$

27. 内积: 设 $X \in \mathcal{X}(M)$, 定义内积 $i_X : \Omega^r(M) \to \Omega^{r-1}(M)$, 运算 $i_X\omega(X_1, ..., X_{r-1}) = \omega(X, X_1, ..., X_{r-1})$;
    (a) 分量形式: $i_X\omega = \frac{1}{(r-1)!}X^\nu\omega_{\nu\mu_2...\mu_r}dx^{\mu_2}\wedge...\wedge dx^{\mu_r} = \frac{1}{r!}\sum_{s=1}^{r} X^{\mu_s}\omega_{\mu_1...\mu_s...\mu_r}(-1)^{s-1}dx^{\mu_1}\wedge ... \wedge \widehat{dx^{\mu_s}} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}$, $\widehat{dx^{\mu_s}}$ 表示抽除该项;
    (b) 微分形式的 Lie 导数: $L_X\omega = (di_X + i_Xd)\omega = (\omega_\mu\partial_\nu X^\mu + X^\mu\partial_\mu\omega_\nu)dx^\nu$;
        i. $r-$ 形式: $L_X\omega = X^\nu\frac{1}{r!}\partial_\nu\omega_{\mu_1...\mu_r}dx^{\mu_1}\wedge...\wedge dx^{\mu_r} + \sum_{s=1}^{r}\partial_{\mu_s}X^\nu\frac{1}{r!}\omega_{\mu_1...\nu...\mu_r}dx^{\mu_1}\wedge ... \wedge dx^{\mu_r}$;
        ii. 普遍形式: $L_X = di_X + i_Xd$;
28. 复形: 一系列空间之间的一系列线性映射;
    (a) 映射的象: 设映射 $t : V_1 \to V_2$, 则记映射 t 的象为 $Im(t) \subseteq V_2$;
    (b) 映射的核 (原象): 设映射 $t : V_1 \to V_2$, 则记映射 t 的原象为 $Ker(t) \subseteq V_1$;
    (c) de Rham 复型: 对一系列空间 $\Omega^n(M)$ 之间有一系列映射 d_n, 若 $Imd_r \subseteq Kerd_{r+1}$, 则称这个复型为 de Rham 复型;
        i. 恰当形式的拓扑空间可以推出闭形式;
29. 近辛流形 (AS 流形): 如果 $2n$ 维光滑流形 M 上存在一个 $2-$ 形式 ω 满足非退化条件 $\omega^n := \omega \wedge ... \wedge \omega \neq 0$, 则称其为近辛流形;
    (a) 非退化条件的其他形式: 将 $2-$ 形式的 ω 展开为分量形式 $\omega = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$, 则非退化性等价于 $\det[\omega_{\mu\nu}]_{2n\times 2n} \neq 0$;
    (b) 若定义 $\mathrm{Pf}[\omega_{\mu\nu}] := \frac{1}{2^n n!}\omega_{\mu_1\nu_1}...\omega_{\mu_n\nu_n}\epsilon^{\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}$, 则 $\det[\omega] = \mathrm{Pf}[\omega]^2$;
30. 辛流形: 如果 AS 流形 (M, ω) 上的辛形式是闭的 $d\omega = 0$, 则称其为辛流形;
    (a) 辛同胚: 辛流形 (M, ω) 和 (M', ω') 之间的微分同胚映射 $f : M \to M'$ 能够保持辛结构 $\omega = f^*\omega'$, 则称该微分同胚映射为辛同胚;
    (b) 自映射保持辛结构的条件: 当辛流形 (M, ω) 上的自映射 $\sigma_t : M \to M$ 满足 $\sigma_t^*\omega = \omega \Rightarrow L_X\omega = 0$ 时, 则自映射能够保持辛结构;
31. 可定向性: 设 M 连通, $p \in U_i \cap U_j \subset M$ 有两套局部坐标系 x^μ, y^α; 切空间 T_pM 由 $e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 或 $\tilde{e_\alpha} = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ 张成 $\tilde{e_\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}e_\mu$. $J = \det[\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}]$ 的符号确定相对定向性, $\mathrm{sgn}J = 1$ 时, $e_\mu, \tilde{e_\alpha}$ 保持定向;

(a) 可定向流形: 若 M 中任意两个有交集的坐标卡 $U_i \cap U_j \neq \phi$, 存在 U_i 的局部坐标 $\{x^\mu\}$ 和 U_j 的局部坐标 $\{y^\alpha\}$, 使得 $J|_{U_i \cap U_j}$ 处处为正, 则称 M 是可定向流形;

(b) 可定向流形 M 允许有处处非零的体积形式: 设 $h(p) > 0$, $\omega = h(p)dx^1 \wedge ... \wedge dx^m \in \Omega^m(M) \cong \Omega^0(M) = \mathcal{F}(M)$;

i. 坐标变换: 点 $p \in U_i \cup U_j$ 的坐标变换定义为 $\omega = h(p)\frac{\partial x^1}{\partial y^{\mu_1}} dy^{\mu_1} \wedge ... \wedge \frac{\partial x^m}{\partial y^{\mu_m}} dy^{\mu_m} = h(p) \det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\right) dy^1 \wedge ... \wedge dy^m$;

ii. 不可定向流形上不存在体积形式;

32. 积分的引入: 当流形 M 是可定向的时, 才能对其上的微分形式进行积分;

(a) (TODO)$m-$ 元积分: 函数 $f : M \to \mathbb{R}$ 在流形上积分可以通过体积元 ω 定义. 在坐标卡 U_i 上构建积分, 将其定义为普通维欧氏空间中开集 $\varphi_i(U_i)$ 上的 $m-$ 元积分 $\int_{U_i} f\omega = \int_{\varphi(U_i)} f(\varphi_i^{-1}(x))h(\varphi_i^{-1}(x))dx^1...dx^m$;

i. 存在的问题:

A. 开覆盖 $\{U_i | i \in I\}$ 的指标集 I 未必可数, 更不一定是有限集;

B. 即使存在有限的开覆盖 (如紧致流形), 仍有在 $U_i \cap U_j \neq \phi$ 上计重积分的问题;

C. 依赖开覆盖的选择, 不仅仅反映 (M, ω, f) 的信息;

(b) 单位拆分: 给定 M 的一个开覆盖 $\{U_i | i \in I\}$, 从属于该开覆盖的单位拆分是一族光滑函数 $\{\varepsilon_i : M \to \mathbb{R} | i \in I\}$, 满足下列条件:

i. $\forall p \in M, 0 \leq \varepsilon_i(p) \leq 1$;

ii. $\text{supp}\varepsilon_i \subset U_i$, 即 $p \notin U_i \Rightarrow \varepsilon_i(p) = 0$;

iii. $\forall p \in M, \exists$ 邻域 $O_p \subset M$ 使 $\varepsilon_i|_{O_p} \neq 0$ 的函数 ε_i 仅有有限多个;

iv. $\forall p \in M$, 有单位拆分 $\sum\limits_{i \in I, \varepsilon_i(p) \neq 0} \varepsilon_i(p) = 1$(有限和);

A. $f(p) = \sum\limits_i f(p)\varepsilon_i(p) = \sum\limits_i f_i(p)$;

B. $\int_M f\omega = \sum\limits_i \int_{U_i} f_i\omega$;

(c) 单位拆分的特点:

i. 不同的开覆盖有不同的单位拆分, 积分值相同;

ii. 和式中的非零部分构成有限和;

iii. 在 $\cap U_j \neq \phi$ 上,如果 $f_i(p) \neq 0$,则 $\sum f_j(p) = f(p)$,积分计重的个部分被权重因子 $\varepsilon_j(p)$ 压缩,总和相当于只计一次;

(d) 仿紧流形:

i. 细分: 开覆盖 $\{U_i | i \in I\}$ 的一个细分 $\{V_j | j \in J\}$ 指每个 V_j 都是某个 U_i 的子集;

ii. 局部有限: 开覆盖 $\{U_i | i \in I\}$ 是局部有限的,如果 $\forall p \in M, \exists$ 邻域 O_p 使 $\{i \in I | U_i \cap O_p\}$ 为有限;

iii. 仿紧流形意指 M 上的每个开覆盖都有一个局部有限的细分;

iv. 紧致流形是仿紧流形的特殊形式;

(e) 单位拆分的条件: Hausdorff 空间 M 允许单位拆分, 当且仅当 M 是仿紧的;

33. Hodge 星运算: 若 $M = \mathbb{R}^m$, 定义线性运算 $*$: $\Omega_q(M) \to \Omega^{m-q}(M)$;

(a) ${}^*(dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_q}) = \frac{1}{(m-q)!}\epsilon_{\mu_1 ... \mu_q \mu_{q+1} ... \mu_m} dx^{\mu_{q+1}} \wedge ... \wedge dx^{\mu_m}$;

i. 分量形式: 对于 $\omega_q = \frac{1}{q!}\omega_{\mu_1 ... \mu_q} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_q} \in \Omega^q(M)$, 有 ${}^*\omega_q = \frac{1}{q!}\omega_{\mu_1 ... \mu_q} {}^*(dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_q}) = \frac{1}{q!(m-q)!}\omega_{\mu_1 ... \mu_q}\epsilon^{\mu_1 ... \mu_q}_{\mu_{q+1} ... \mu_m} dx^{\mu_{q+1}} \wedge ... \wedge dx^{\mu_m}$;

(b) Levi-Civita 张量: $\epsilon_{\mu_1 ... \mu_m} = \begin{cases} +1 & \mu_1, ..., \mu_m \text{是} 1, ..., m \text{的偶排列} \\ -1 & \mu_1, ..., \mu_m \text{是} 1, ..., m \text{的奇排列}; \\ 0 & \text{其他不成排列的形式} \end{cases}$

i. 对于 $\delta^{\nu_1 ... \nu_s}_{\mu_1 ... \mu_s} = \det \begin{pmatrix} \delta^{\nu_1}_{\mu_1} & ... & \delta^{\nu_s}_{\mu_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{\nu_1}_{\mu_s} & ... & \delta^{\nu_s}_{\mu_s} \end{pmatrix}$, Levi-Civita 张量满足 $\epsilon_{\mu_1 ... \mu_m} = \delta^{1 ... m}_{\mu_1 ... \mu_m}$;

ii. 推论: ${}^{**}\omega_q = (-1)^{q(m-q)}\omega_q$;

34. 顶形式与体积元的关系: $dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_m} = \epsilon^{\mu_1 ... \mu_m} dx^1 \wedge ... \wedge dx^m$;

35. 向量空间的内积: 可在向量空间 $\Omega^q(M)$ 中引入内积. 对于 $\begin{cases} \alpha_q = \frac{1}{q!}a_{\mu_1 ... \mu_q} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_q} \\ \beta_q = \frac{1}{q!}b_{\mu_1 ... \mu_q} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_q} \end{cases}$, 有内积 $(\alpha_q, \beta_q) = \int_M \alpha_q \wedge {}^*\beta_q = \frac{1}{q!}\int_M a_{\mu_1 ... \mu_q}(x) b_{\mu_1 ... \mu_q}(x) dx^1 \wedge ... \wedge dx^m$;

(a) 外导数 d 的伴随算子: $\delta : \Omega^q(M) \to \Omega^{q-1}(M)$, $(\alpha_q, d\beta_{q-1}) = (\delta\alpha_q, \beta_{q-1}) \Rightarrow \delta = (-1)^{mq+m+1*}d^*$;

i. 幂零性: $\delta^2 = 0$;

(b) Laplace 算子: $\Delta : \Omega^q \to \Omega^q$, $\Delta = (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d$, $\Delta\omega_q = d_{q-1}\delta_q\omega_q + \delta_{q+1}d_q\omega_q$;

i. 正定性: $(\omega_q, \Delta\omega_q) = (d\omega_q, d\omega) + (\delta\omega_q, \delta\omega_q) \geq 0$;

ii. 调和形式: $\Delta\omega_q = 0$ 的形式;

36. Hodge 定理: 设 M 为紧致无边界流形, 其上任一 $q-$ 形式的 ω_q 可分解为 $\omega_q = d\alpha_{q-1} + \delta\beta_{q+1} + \gamma_q, \Delta\gamma_q = 0$;

37. Stokes 定理: $\int_M d\omega_{m-1} = \int_{\partial M} \omega_{m-1}$;