# 同调群和 de Rham 定理

1. 几何独立: 在 $\mathbb{R}^m$ 中 $r+1$ 个几何独立的点不同时在任何 $(r-1)-$ 维超平面上;
2. 单纯形: 设 $0 \le r \le m, p_0, ..., p_r$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中 $r+1$ 个几何独立的点, $r-$ 单纯形由有界闭集 $\sigma^r =< p_0p_1...p_r >= \{x \in \mathbb{R}^m | x = \sum\limits_{i=0}^{r} c_i p_i, c_i \ge 0, \sum\limits_{i=0}^{r} c_r = 1\}$;
   (a) 真面: 设 $0 \le q \le r$, 在 $\sigma^r$ 的 $r+1$ 个顶点中任意选择 $q+1$ 个点 $p_{i_0}, ..., p_{i_q}$ 构造的 $q-$ 单形 $\sigma^q =< p_{i_0}...p_{i_q} >$ 称为 $\sigma^r$ 的一个 $q-$ 面, 以 $\sigma^q \le \sigma^r$ 记. 若 $\sigma^q \ne \sigma^r$, 则 $\sigma^q$ 为 $\sigma^r$ 的真面, 记为 $\sigma^q < \sigma^r$;
   (b) 单纯复合形: 设 $K$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中有限个单形的集合, 称 $K$ 为单纯复形, 当且仅当下列条件满足:
      i. $\forall \sigma \in K, \sigma' \le \sigma \Rightarrow \sigma' \in K$;
      ii. $\forall \sigma, \sigma' \in K, \sigma \cap \sigma'$ 或为空集, 或构成 $\sigma, \sigma'$ 的公共面, 即同时有 $\sigma \cap \sigma' \le \sigma, \sigma \cap \sigma' \le \sigma'$;
   (c) 复形的维度: 复形 $K$ 的维数 $\dim K$ 定义为其中最高维单形的维数;
3. 多面体: 设 $K$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个复形, 其全体单形的全体点所形成的空间 $|K| \subset \mathbb{R}^m$ 被称为多面体;
4. 单纯剖分: 复形 $K$ 被称为 $K$ 上多面体的一个单纯剖分或三角剖分;
   (a) 多面体允许有不同的单纯剖分: $K \ne K', |K| = |K'|$;
   (b) 可三角剖分: 设 $X$ 为拓扑空间, 如果存在一个复形 $K$ 以及同胚映射 $f : |K| \to X$, 则称 $X$ 可三角剖分, 并称 $(f, K)$ 为 $X$ 的一个三角剖分;
5. 单向的单形: $r \ge 1$ 维的单形可以引入两种不同的定向. 设 $\pi$ 是 $(0, 1, ..., r)$ 的一个排列, 定向单形 $\sigma^r = (p_0...p_r)$ 有 $(p_{\pi(0)}...p_{\pi(r)}) = \mathrm{sgn}\pi(p_0...p_r) = \pm\sigma^r$;
   (a) $r-$ 维链: 如复形 $K$ 中有 $I_r$ 个 $r-$ 维定向单形 $\sigma_i^r, 1 \le i \le I_r$, 该复形的一条 $r-$ 维链是指形式和 $c = \sum\limits_{i=1}^{I_r} n_i \sigma_i^r, n_i \in \mathbb{Z}$;

6. 链群: 复形 $K$ 中的 $r-$ 维链之间可做加法运算 $c=\sum_{i=1}^{I_r} n_i\sigma_i^r, c'=\sum_{i=1}^{I_r} n_i'\sigma_i^r \Rightarrow c+c'=\sum_{i=1}^{I_r}(n_i+n_i')\sigma_i^r$. 在该运算下, $K$ 中所有 $r-$ 维链形成一个交换群 $C_r(K)$, 称之为链群, $(n_1,...,n_{I_r})$ 称为链 $c=\sum_i n_i\sigma_i^r$ 的系数;
   (a) 单位元: $0=\sum_{i=1}^{I_r} 0\cdot\sigma_i^r$;
   (b) 逆元: $-c=\sum_{i=1}^{I_r}(-n_i)\cdot\sigma_i^r$;
   (c) $C_r(K)\cong\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}\otimes...\otimes\mathbb{Z}$;
7. 边缘算子: 边缘算子 $\partial_r$ 作用在 $r-$ 维单形 $\sigma^r$ 上给出 $(r-1)-$ 维链 $\partial_r(p_0...p_r)=\sum_{i=1}^{r}(-1)^i(p_0...\hat{p}_i...p_r)$;
   (a) 将 $\partial$ 线性地扩充到 $r-$ 维链的作用, 该算子显然是群同态 $\partial_r : C_r(K)\to C_{r-1}(K), \partial_r\left(\sum_{i=1}^{I_r} n_i\sigma_i^r\right)=\sum_{i=1}^{I_r} n_i\partial_r\sigma_i^r$;
8. 闭链: $c\in C_r(K)$ 称为 $r-$ 维闭链, 当且仅当 $\partial_r c=0$;
   (a) 边缘链: $c$ 称为 $r-$ 维边缘链, 当且仅当 $\exists c'\in C_{r+1}(K), c=\partial_{r+1}c'$;
      i. $r-$ 维边缘链之集 $B_r(K)$ 构成 $C_r(K)$ 的子群 $0=\partial(0)$;
   (b) 边缘算子的幂零性: $\partial_r\circ\partial_{r+1} : C_{r+1}(K)\to C_{r-1}(K)$ 是零映射, 即 $\partial_r(\partial_{r+1}c)=0, \forall c\in C_{r+1}(K)$, 简记为 $\partial^2=0$;
9. 同调群:
   (a) 同调群: 设 $K$ 是 $n-$ 维复形, $r-$ 阶同调群 $H_r(K), 0\le r\le n$ 定义为 $K$ 的 $r-$ 维闭链群 $Z_r(K)$ 模掉边缘链子群 $B_r(K)$, 即 $H_r(K)=Z_r(K)/B_r(K)$;
      i. 闭链的同调关系是等价关系, 闭链 $c\in Z_r(K)$ 的同调等价类记作 $[c]\in H_r(K)$;
      ii. 设 $(K,f),(L,g)$ 分别是拓扑空间 $X$ 和 $Y$ 的三角剖分, 则当 $X\cong Y$ 同胚时有 $H_r(K)=H_r(L), r=0,1,...$;
         A. 同调群是拓扑不变量;
      iii. 若 $K$ 是连通的复形, 则 $H_0(K)=\mathbb{Z}$;

(b) 流形的 Betti 数: $b_r = \dim H_r(M,\mathbb{Z})$, 及构成复形的自由生成群的个数;

   i. Euler 示性数: $\chi(M) = \sum\limits_{r=0}^{\dim M}(-1)^r b_r$, Euler 示性数是一个拓扑不变量;

(c) 有限生成: 如果交换群 $G$ 存在 $I < \infty$ 个生成元 $a_j, 1 \le j \le I$, 使得任何群元 $g$ 都能够表示成 $g = \sum\limits_{j=1}^{I} n_j a_j (\forall g \in G, n_j \in \mathbb{Z})$, 则称 $G$ 是有限生成的;

   i. 自由交换群: 如果有限生成交换群 $G$ 的生成元是线性无关的, 即 $n_1 a_1 + ... + n_I a_I = 0$ 蕴含 $n_1 = ... = n_I = 0$, 则称 $G$ 由基元 $a_i, ..., a_I$ 自由生成;

      A. 自由交换群 $G$ 的任一子群 $H$ 仍是一个自由交换群;

(d) 同调群的一般性质:

   i. 如果 $K$ 有 $N$ 个连通分支 $K_1, ..., K_N$, 则 $H_0(K_j) = \mathbb{Z}, 1 \le j \le N$, $H_0(K) = H_0(K_1) \oplus ... \oplus H_0(K_N) = \mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}$;

   ii. $K$ 的 $r-$ 阶同调群由其各个连通分支 $K_j (1 \le j \le N)$ 的 $r-$ 阶同调群确定: $H_r(K) = H_r(K_1) \oplus ... \oplus H_r(K_N)$;

(e) 幺模矩阵: 幺模矩阵 $E_{ij}$ 满足 $(E_{ij})_{kl} = \begin{cases} \delta_{kl} + \delta_{ik}\delta j_{jl} & i \ne j \\ \delta_{kl} - 2\delta_{ik}\delta_{jl} & i = j \end{cases}$, 各元皆为整数, 并且 $\dim E_{ij} = \pm 1$;

(f) 等价关系: 设 $C, D$ 是 $n \times m$ 的整系数矩阵, 如果存在 $n-$ 阶的幺模方阵 $\mathfrak{N}$ 和 $m-$ 阶幺模方阵 $\mathfrak{M}$ 使得 $D = \mathfrak{N} C \mathfrak{M}$, 就称 $D$ 与 $C$ 等价, 记作 $D \sim C$;

(g) 整系数矩阵 $C$ 的初等变换: 都是等价变换;

   i. $C' = E_{ij} C$, $C$ 的第 $i$ 行加上第 $j$ 行;

   ii. $C' = C E_{ji}$, $C$ 的第 $i$ 列加上第 $j$ 列;

   iii. $C' = E_{ii} C$, $C$ 的第 $i$ 行变成相反数;

   iv. $C' = C E_{ii}$, $C$ 的第 $i$ 列变成相反数;

   v. 行或列的交换操作;

(h) 标准型: 若 $n \times m$ 整系数矩阵 $C$ 的秩为 $r (r \le \min(m, n))$, 则存在 $n$ 阶幺模方阵 $\mathfrak{N}$ 和 $m$ 阶幺模方阵 $\mathfrak{M}$ 使得 $D = \mathfrak{N} C \mathfrak{M}$, 则称 $D$ 为 $C$ 的标准型, $r$ 为不变因子;

i. 推论: 如果 $m$ 维自由交换群 $G_m$ 以 $a_1, ..., a_m$ 为一组基, $F$ 是 $G_m$ 的一个子群, 则存在 $G_m$ 的一组基 $a_1', ..., a_m'$ 及 $r$ 个正数 $d_1, ..., d_r (r \leq m)$, 其中 $d_i$ 可除尽 $d_{i+1}$, 使得 $F$ 是以 $d_1 a_1', ..., d_r a_r'$ 为一组基的自由交换群 $(d_1\mathbb{Z}) \oplus ... \oplus (d_r\mathbb{Z})$;

ii. 若 G 是有限维自由交换群, F 是其任一子群, 那么 $G/F \cong \mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}(m-r$ 个自由生成群$) \oplus \mathbb{Z}_{d_1} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{d_r}(r$ 个循环群), 其中 $\mathbb{Z}_d$ 表示整数 $d$ 生成的循环群;

   A. 同调群的一般结构: $H_r(K, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{d_1} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{d_r}$;

   B. 挠子群: 同调群的非自由部分被称为挠子群;

iii. 定理: 在 $n-$ 维复形 $K$ 总设有 $I_r$ 个 $r-$ 维单形, 则 $\chi(K) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r I_r = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r b_r$ 称为复形 $K$ 的 Euler 示性数, 是个拓扑不变量;

(i) 上链: 复形 $K$ 的整系数 $r-$ 维链群 $C_r(K)$ 相应的 $r-$ 维上链群定义为 $C^r(K) = Hom(C_r(K), \mathbb{Z})$;

i. 上闭链: $\delta c^r = 0$;

ii. 上同调群: 复形 $K$ 的 r-维上同调群由商群 $H_r(K, \mathbb{Z}) = Z^r(K, \mathbb{Z})/B^r(K, \mathbb{Z}), 0 \leq r \leq \dim K$ 给出;

   A. 上同调群的一般结构: $H_r(K, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z} \oplus T^r(K)$, 其中 $T^r(K) = T_{r-1}(K)$(即由下同调的低维循环群构成);

10. de Rham 理论:

(a) 流形中的单形: 流形 $M$ 中的 $r-$ 维单形可用光滑映射 $f : \sigma_r \to M$ 的像 $s_r = f(\sigma_r)$ 定义;

i. $r-$ 维链: 设 $\{s_r^j\}$ 是 $M$ 中的 $r-$ 维单形之集, 则 $r-$ 维链为 $c_r = \sum_j a_j s_r^j, a_j \in R$;

ii. 链群: $M$ 中的 $r-$ 维链全体形成链群 $C_r(M)$;

iii. 边缘: 在映射 $f : \sigma_r \to M$ 下, $\partial\sigma_r$ 被映成 $M$ 的子集 $f(\partial\sigma_r)$, 记为 $\partial s_r$, 它构成 $M$ 中的 $(r-1)-$ 维单形, 叫做 $s_r$ 的边缘;

   A. 线性: $\partial : C_r(M) \to C_{r-1}(M)$;

   B. 幂零性: $\partial^2 = 0$;

iv. 边缘链群: 由 $\partial c_r = 0$ 定义的 $r-$ 维闭链全体构成闭链群 $Z_r(M)$, $r-$ 维边缘链 $\partial c_{r+1}$ 全体形成的边缘链群 $B_r(M)$ 是 $Z_r(M)$ 的子群;

(b) 流形 $M$ 上的 $r-$ 阶奇异(下)同调群: $H_r(M) = Z_r(M)/B_r(M), 0 \leq r \leq \dim M$;

i. 奇异同调群与多面体同调群在是当拓扑条件下是同构的;

(c) 微分形式在链上的积分: 设 $\omega \in \Omega^r(M)$, $s_r = f(\sigma_r)$ 为 $r-$ 维单形, $c_r = \sum_j a_j s_r^j \in C_r(M)$ 是任一 $r-$ 维链, 有 $\begin{cases} \int_{s_r} \omega = \int_{\sigma_r} f^* \omega \\ \int_{c_r} \omega = \sum\limits_j a_j \int_{s_r^j} \omega = \sum\limits_j a_j \int_{\sigma_r^j} f^* \omega \end{cases}$ ($f^*$是$\mathbb{R}^r$中

i. Stocks 定理: $\forall \omega \in \Omega^{r-1}(M), c \in C_r(M)$, 有 $\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$ 成立;

A. $r-$ 维链 $c$ 上的积分: $< \omega, \cdot >: C_r(M) \to R, c \mapsto < \omega, c >= \int_c \omega$;

B. Stocks 定理表明外导数 $\partial$ 是上边缘算子;

(d) 上同调群: 流形 $M$ 上的 $r-$ 维 de Rham 上同调群定义为闭的 $r$ 形式全体 $Z^r(M)$ 模掉恰当的 $r-$ 形式全体 $B^r(M)$, $H_{dR}^r(M, \mathbb{R}) = Z^r(M)/B^r(M), 0 \leq r \leq \dim M$. 其中 $Z^r(M) = Ker\{d : \Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)\}$, $B^r(M) = Im\{d : \Omega^{r-1}(M) \to \Omega^r(M)\}$;

i. 两个 $r-$ 阶闭形式是同调等价的, $\omega \sim \omega'$, 如存在恰当的 $r-$ 形式 $d\alpha$ 使得 $\omega' = \omega + d\alpha$, 同调等价类记为 $[\omega]$, 生成 $H_{dR}^r(M)$;

ii. 同调类的双线型: $H_{dR}^r(M) \times H_r(M) \to \mathbb{R}, < [\omega], [c] >=< \omega, c >$;

(e) de Rham 定理: 若 $M$ 紧致, 则 $H_r(M), H_{dR}^r(M)$ 的维数有限, 且双线型 $< [\omega], [c] >$ 非退化 (张成矩阵的行列式不等于 0). 因此 $H_{dR}^r(M)$ 是 $H_r(M)$ 的对偶向量空间;

i. 在 $H_r(M)$ 中任取一组基 $[c_i], 1 \leq i \leq b_r$; 同调等价类相应的代表元为 $c_1, ..., c_{b_r} \in Z_r(M)$:

A. 非退化性: 若 $< [\psi], [c_i] >= 0, 1 \leq i \leq b_r$, 则 $\psi$ 必然是零调的. 即闭的 $r-$ 形式 $\psi$ 是恰当的, $iff \int_{c_i} \psi = 0, 1 \leq i \leq b_r$;

B. 对偶基的存在性: $\exists [\omega_i] \in H_{dR}^r(M)$, 使得 $\int_{c_i} \omega_j = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq b_r$;

ii. 傅立叶技巧: $\forall u_1, ..., u_{b_r} \in \mathbb{R}, \exists \omega \in Z^r(M)$ 使 $\int_{c_i} \omega = u_i, 1 \le i \le b_r$, 只需令 $\omega = \sum\limits_i u_i \omega_i$;

(f) 同伦: 设 $X, Y$ 是拓扑空间, 称连续映射 $f, g : X \to Y$ 是同伦的, 若存在一个连续映射 $H : X \times [0, 1] \to Y$ 使得 $\forall x \in X, H(x, 0) = f(x), H(x, 1) = g(x)$;

i. 伦移: 函数 $H$ 称为从 $f$ 到 $g$ 的一个伦移, 即映像经过连续形变 $f(X) \to g(X) \subset Y$;

ii. 同伦等价: 连续映射 $f_0 : X \to Y$ 与 $f_1 : X \to Y$ 同伦等价的记号: $f_0 \simeq f_1 : X \to Y$;

(g) 拓扑空间的同伦: 拓扑空间 $X, Y$, 连续映射 $f : X \to Y, g; Y \to X$, 满足 $g \circ f \simeq Id_X, f \circ g \simeq Id_Y$, 则称 $X$ 与 $Y$ 之间同伦, 记作 $X \simeq Y$;

i. 同胚的拓扑空间是同伦等价的, 但反之不成立;

(h) 可缩空间: 存在常值映射 $pr : X \to X, \forall x \in X, pr(x) = x_0$ 同伦于恒等映射 $Id : X \to X$, 则称 $X$ 为可缩空间;

(i) Poincare 引理: 若流形 $M$ 的一个坐标邻域 $U$ 是可缩的, 那么 $U$ 上的任何闭形式必然是恰当的: $\forall \omega \in \Omega^r(U), d\omega = 0 \Rightarrow \exists \alpha \in \Omega^{r-1}(U), \omega = d\alpha$;

i. 对于可缩空间 $\mathbb{R}^n$, 其上的微分形式皆为恰当形式 $H^r_{dR}(\mathbb{R}^n) = 0, 1 \le r \le n$, 由连通性知 $H^0_{dR}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$;

ii. 一个恒等式: $\forall \omega \in \Omega^r(N), dPH^*\omega + PH^*d\omega = g^*\omega - f^*\omega$;

iii. 若 $f, g : M \to N$ 是互为同伦的映射, 则它们各自诱导的线性映射 $f^*, g^* : H^r_{dR}(N) \to H^r_{dR}(M)$ 相等, 即 $f^* = g^*$;

(j) 单连通流形 $M$ 上的任一闭 $1-$ 形式 $\omega$ 沿曲线 $\gamma(x_0, x)$ 的积分只依赖于端点 $x_0$ 和 $x$, 当 $x_0$ 固定而 $x$ 在 $M$ 中变动时, $f(x) = \int_{\gamma(x_0,x)} \omega$ 是单值函数, $df = \omega$, 故 $H^1_{dR}(M) = 0$;

11. Poincare 对偶: 设 $M$ 为 $m-$ 维紧致流形, $\partial M = \phi$, 定义双线型 $< \cdot, \cdot >$: $H^r_{dR}(M) \times H^{m-r}_{dR}(M) \to \mathbb{R}$: $< \omega, \eta >= \int_M \omega \wedge \eta, \forall [\omega] \in H^r_{dR}(M), [\eta] \in H^{m-r}_{dR}(M)$;

(a) 表达式与代表元的选择无关;

(b) 该双线型是非退化的, 向量空间的对偶 $H^r_{dR}(M) \cong H^{m-r}_{dR}(M), 0 \le r \le m$;

(c) $b_r = b_{m-r}$, 故奇数维流形的欧拉示性数为零: $\chi(M) = (b_0 + (-1)^m b_m) - (b_1 + (-1)^m b_{m-1}) + ... = 0$;

(d) de Rham 上同调类之间的外积: $[\omega] \wedge [\eta] = [\omega \wedge \eta]$;

i. 上同调环: 向量空间的直和 $H^*(M) = \oplus_{r=0}^m H^r(M)$ 中除原有的加法外, 还可以引入外积使 $H^*(M)$ 形成环: $\wedge : H^*(M) \times H^*(M) \to H^*(M)$;

12. Kunneth 公式: 当 $1 \leq p \leq r$ 时, $\omega_i^p \wedge \eta_j^{r-p}$ 构成 $M$ 上闭的 $r-$ 形式, 故其等价类描述 $H^r(M)$ 中的一元; 反之, $H^r(M)$ 中的任一元可以用乘积基 $[\omega_i^p \wedge \eta_j^{r-p}]$ 展开, 于是 $H^r(M) = \oplus_{p+q=r} H^p(M_1) \otimes H^q(M_2) \Rightarrow \begin{cases} b_r(M) = \sum\limits_{p+q=r} b_p(M_1) b_q(M_2) \\ \chi(M) = \chi(M_1)\chi(M_2) \end{cases}$;