同伦群

1. 保基连续映射: 设 Σ, X 是拓扑空间, 分别取定"基点"$\sigma_0 \in \Sigma, x_0 \in X$, 若映射 $f: \Sigma \to X$ 是保持基点的, 即 f 满足 $f(\sigma_0) = x_0$, 则称其为保基连续映射;
   (a) 保基连续映射 $f: \Sigma \to X$ 全体记作 $X^\Sigma = \{f | f: \Sigma \to X, f(\sigma_0) = x_0\}$;
   (b) 保基映射 $f: \Sigma_2 \to \Sigma_1$ 及 $g: X_1 \to X_2$ 诱导了 $X_1^{\Sigma_1} \to (g^f) \to X_2^{\Sigma_2}, g^f: X_1^{\Sigma_1} \to X_2^{\Sigma_2}, \forall h \in X_1^{\Sigma_1}, g^f(h) = g \circ h \circ f$;
2. 映射 g^f 的基本性质:
   (a) 若 $f': \Sigma_3 \to \Sigma_2, g': X_2 \to X_3$ 是保基映射, 则 $g'^{f'} \circ g^f = (g' \circ g)^{f \circ f'}: X_1^{\Sigma_1} \to X_3^{\Sigma_3}$;
   (b) 若 $f_1 \simeq f_0: \Sigma_2 \to \Sigma_1, g_1 \simeq g_0: X_1 \to X_2$, 则 $g_1^{f_1} \simeq g_0^{f_0}: X_1^{\Sigma_1} \to X_2^{\Sigma_2}$;
3. 如果 $\Sigma_1 \simeq \Sigma_2, X_1 \simeq X_2$, 那么 $X_1^{\Sigma_1} \simeq X_2^{\Sigma_2}$:
   (a) $\Sigma_1 \simeq \Sigma_2 \Rightarrow \begin{cases} f: \Sigma_2 \to \Sigma_1 \\ f': \Sigma_1 \to \Sigma_2 \end{cases}, f \circ f' \simeq Id, f' \circ f \simeq Id$;
   (b) $X_1 \simeq X_2 \Rightarrow \begin{cases} g: X_2 \to X_1 \\ g': X_1 \to X_2 \end{cases}, g \circ g' \simeq Id, g' \circ g \simeq Id$;
   (c) $g^f: X_1^{\Sigma_1} \to X_2^{\Sigma_2}, g'^{f'}: X_2^{\Sigma_2} \to X_1^{\Sigma_1}$;
4. 道路空间总是可缩的: $X^{[0,1]} \simeq X^{\{1\}} \simeq \{f_0\}$;
5. 加接: X 在 $f(Z)$ 处与 Y 的加接定义为 $X \cup Y / \sim$, 记为 $X \cup_f Y$;
6. 楔积: 取基点 $x \in X, y \in Y$, 楔积 $X \vee Y = (X \cup Y)/(x \sim y)$;
   (a) $X \vee Y$ 可看作乘积空间 $X \times Y$ 的子集 $(X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$;
7. 给定拓扑空间 X_j, Y_j 及连续保基映射 $f_j: X_j \to Y_j (j \in J), \exists \vee_{j \in J} f_j: \vee_{j \in J} X_j \to \vee_{j \in J} Y_j$ 具有下面的性质:

(a) 若 $g_j;Y_j \to Z_j(\forall j \in J)$ 是连续保基的, 则 $(\vee_{j\in J} g_j) \circ (\vee_{j\in J} f_j) = \vee_{j\in J}(g_i \circ f_j)$;

(b) 若 $f_i \simeq g_j : X_j \to Y_j$ 是同伦等价的映射 $(\forall j \in J)$, 那么 $\vee_{j\in J} f_j \simeq \vee_{j\in J} g_j : \vee_{j\in J} X_j \to \vee_{j\in J} Y_j$;

8. 若 $\forall j \in J, X_j \simeq Y_j$ 是同伦型, 则 $\vee_{j\in J} X_j \simeq \vee_{j\in J} Y_j$;

9. 在 $X \vee Y$ 与乘积空间 $X \times Y$ 的某子集之间存在同胚 $\phi : X \vee Y \to (X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$;

   (a) 映射 ϕ 是满射且单射, 因此是一对一映射, 故存在逆映射 $\phi^{-1} : (X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y) \to X \vee Y$;

10. 归纳积 (旋积): 拓扑空间 X, Y 的旋积定义为 $X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y)$;

    (a) $S^n \wedge S^1 \cong S^{n+1}$;

    (b) $B^n \wedge S^1 \cong B^{n+1}$;

11. 给定拓扑空间 X_j, Y_j 及连续保基映射 $f_j : X_j \to Y_j (j = 1, 2), \exists f_1 \wedge f_2 : X_1 \wedge X_2 \to Y_1 \wedge Y_2$ 具有以下性质:

    (a) 若 $g_j : Y_j \to Z_j (j = 1, 2)$, 则 $(f_1 \wedge f_2) \circ (g_1 \wedge g_2) = (f_1 \circ g_1) \wedge (f_2 \circ g_2)$;

    (b) 如果 $f_j \simeq g_j : X_j \to Y_j$ 是同伦等价的映射 $(j = 1, 2)$, 那么 $f_1 \wedge f_2 \simeq g_1 \wedge g_2 : X_1 \wedge X_2 \to Y_1 \wedge Y_2$;

    (c) 推论: 若 $X_j \simeq Y_j (j = 1, 2)$ 同伦, 则 $X_1 \wedge X_2 \simeq Y_1 \wedge Y_2$;

    (d) 推论: 任意的 X 与可缩空间 Y 的归纳积 $X \wedge Y$ 是可缩的;

12. 约化角锥: 任意拓扑空间 X 的约化角锥 $c(X) = X \wedge [0, 1]$ 是可缩的;

13. 约化双角锥: 拓扑空间 X 的约化双角锥 $s(X) = X \wedge S^1$;

14. 分配律: 设 X, Y, Z 为拓扑空间, 则有 $(X \vee Y) \wedge Z \cong (X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z)$, 推广后得到 $(\vee_{j\in J} X_j) \wedge Y \cong \vee_{j\in J}(X_j \wedge Y_j)$;

15. 结合律: 若 (a)-(c) 满足至少项, 则 $(X \wedge Y) \vee Z \cong X \wedge (Y \vee Z)$;

    (a) X, Y 紧致, 且 X 为 Hausdorff 空间;

    (b) 或者, Y, Z 紧致, 且 Z 为 Hausdorff 空间;

(c) 或者, X, Z 是局部紧致的 Haussdorff 空间;

16. 结合律推论: $S^n \wedge S^m \cong S^{n+m}$;

17. 给定拓扑空间 X, Y, Z:

    (a) 若 X, Y 为 Hausdorff 空间, 则 $Z^{X \vee Y} \cong Z^X \times Z^Y$;

    (b) 若 X 为 Hausdorff 空间, 则 $(Y \times Z)^X \cong Y^X \times Z^X$;

    (c) 若 X, Y 是紧致的 Hausdroff 空间, 则 $Z^{X \wedge Y} \cong (Z^Y)^X$;

18. 圈空间: X 的圈空间定义为 $\Omega(X) = X^{S^1}$;

    (a) $\Omega(\Omega(...\Omega(X)...)) \cong X^{S^1 \wedge S^1 ... \wedge S^1} \cong X^{S^n}$;

    (b) $\Omega(X)^Y = (X^{S^1})^Y \cong X^{Y \wedge S^1} = X^{s(Y)}$;

19. 同伦等价类: 保基映射 $f, g : \Sigma \to X$ 间的同伦 $f \simeq g$ 在 X^Σ 中确定了一个等价关系, 其同伦等价类 $[f]$ 形成的空间为 $[\Sigma, X] = \{[f] | f \in X^\Sigma\} = X^\Sigma / \simeq$, 称为同伦类空间;

    (a) $n-$ 阶同伦群: $\pi_n(X) = [S^n, X]$

20. 设 $f : Y_0 \to Y_1$ 是保基连续映射, 则 f 又到了 $f_\bullet : [X, Y_0] \to [X, Y_1]$, 具有如下性质:

    (a) 若 $f \simeq f' : Y_0 \to Y_1$, 则 $f_\bullet = f'_\bullet; [X, Y_0] \to [X, Y_1]$;

    (b) 恒等映射 $1 : Y \to Y$ 诱导的 $1_\bullet : [X, Y] \to [X, Y]$ 是恒等映射;

    (c) 若 $g : Y_1 \to Y_2$, 则 $(g \circ f)_\bullet = g_\bullet \circ f_\bullet : [X, Y_0] \to [X, Y_1]$;

    (d) 推论: 如果 $f : Y_0 \to Y_1$ 是一个同伦等价性映射 (即存在 $g : Y_1 \to Y_0$ 使 $f \circ g \simeq 1, g \circ f \simeq 1$), 那么 f 所诱导的映射 $f_\bullet : [X, Y_0] \to [X, Y_1]$ 是 $1 : 1$ 的;

21. 若对于一切拓扑空间 X, $f_\bullet : [X, Y_0] \to [X, Y_1]$ 都是 $1 : 1$ 的, 那么 $f : Y_0 \to Y_1$ 是同伦等价性映射, $Y_0 \simeq Y_1$;

    (a) Whitehead 定理: $\pi_n(Y_0) \cong \pi_n(Y_1), \forall n \geq 0 \Rightarrow Y_0 \simeq Y_1$;

22. 映射 $f : X_0 \to X_1$ 诱导的 $f^\bullet : [X_1, Y] \to [X_0, Y]$ 具有下列性质:

    (a) 若 $f \simeq f' : X_0 \to X_1$, 则 $f^\bullet = f'^\bullet : [X_1, Y] \to [X_0, Y]$;

   (b) 恒等 $1 : X \to X$ 诱导的 $1^{\bullet} : [X, Y] \to [X, Y]$ 是恒等的;

   (c) 若 $g : X_1 \to X_2$, 则 $(g \circ f)^{\bullet} = f^{\bullet} \circ g^{\bullet} : [X_2, Y] \to [X_0, Y]$;

23. 若 $f : X_0 \to X_1$ 对一切拓扑空间 Y 给出 $1 : 1$ 对应的 $f^{\bullet} : [X_1, Y] \to [X_0, Y]$, 则 f 是同伦等价性映射 $X_0 \simeq X_1$;

24. 当 $n \geq 1$ 时, S^n 是 $AH'I-$ 空间 $\Rightarrow \pi_n(X) = [S^n, X]$ 具有群结构 (这个群结构在 $n > 1$ 时是交换群);

25. 若 Y 是局部紧致的 Hausdorff 空间, 则存在 $1 : 1$ 映射 $[X \wedge Y, Z] \leftrightarrow [X, Z^Y]$; 在有群结构的情形下, 该映射为群同构 $[X \wedge Y, Z] \cong [X, Z^Y]$;

   (a) $[s(X), Y] \cong [X, \Omega(Y)]$;

   (b) $[S^n \wedge Y, Z] \cong [S^n, Z^Y] = \pi_n(Z^Y), \pi_0(Z^Y) = [Y, Z]$;

26. 一些记号: 设 $y \in Y$ 为基点, $f : Y \to Z, g : Y' \to Z'$:

   (a) 恒等映射: $1 = 1_Y : Y \to Y$;

   (b) 含入映射: $i_1, i_2 : Y \to Y \times Y$;

   (c) 常值映射: $e_Y : Y \to Y$;

   (d) 对角映射: $\Delta_Y : Y \to Y \times ... \times Y$;

   (e) 直积映射: $f \times g : Y \times Y' \to Z \times Z'$;

   (f) 投影: $p_1, p_2 : X \vee X \to X, \begin{cases} p_1(x_1, x_2) = x_1 \\ p_2(x_1, x_2) = x_2 \end{cases}$;

   (g) 折迭: $\nabla_X : X \vee X \to X, \nabla_X(x, x_0) = \nabla_X(x_0, x) = x$

27. $H-$ 空间 (Hopf 空间): 对拓扑空间 Y, 若存在一个映射 $m : Y \times Y \to Y$ 满足条件 $m \circ i_1 \simeq m \circ i_2 \simeq 1_Y$, 则 Y 被称为 $H-$ 空间;

   (a) 用 m 定义 Y 中两点的乘法, 要求乘法单位元为基点 $\forall y, y' \in Y, y \cdot y' = m(y, y') \in Y$;

28. 结合的 $H-$ 空间 ($AH-$ 空间): 若 m 满足 $m \circ (m \times 1_Y) \simeq m \circ (1_Y \times m) : Y \times Y \times Y \to Y$;

29. 有逆元的 $H-$ 空间 ($HI-$ 空间): 若存在逆运算 $u : Y \to Y$ 满足 $m \circ (u \times 1_Y) \circ \Delta_Y \simeq m \circ (1_Y \times u) \circ \Delta_Y \simeq e_Y$;

30. 若 Y 是任意拓扑空间, Y 为 $AHI-$ 空间, 则 $[X,Y]$ 可以赋予一个群结构;

31. 设 Y 为 $AHI-$ 空间, 有任一连续映射 $g : X_0 \to X_1$ 诱导的 $g^\bullet : [X_1,Y] \to [X_0,Y]$ 是群同态;

    (a) 特别的: 当 $g : X_0 \simeq X_1$ 是同伦等价性映射时, $g^\bullet$ 是群同构;

32. 对偶 Hopf 空间: 若拓扑空间 X 存在映射 $\mu : X \to X \vee X$ 满足条件 $p_1 \circ \mu \simeq p_2 \circ \mu \simeq 1_X$, 则称其为对偶 Hopf 空间, 记为 $H'-$ 空间;

33. 结合的 $H'-$ 空间 ($AH'-$ 空间): $(\mu \vee 1_X) \circ \mu \simeq (1_X \vee \mu) \circ \mu : X \to X \vee X \vee X$;

34. 存在逆元的 $H'-$ 空间 ($H'I-$ 空间): 如果存在逆运算 $v : X \to X$ 满足 $\nabla_X \circ (v \vee 1_X) \circ \mu \simeq \nabla_X \circ (1_X \vee v) \circ \mu \simeq e_X$, 则称其为存在逆元的 $H'-$ 空间;

35. 若 X 为 $AH'I-$ 空间, Y 是任一拓扑空间, 则 $[X,Y]$ 可赋予群结构. 由任何连续映射 $g : Y_0 \to Y_1$ 诱导的 $g_\bullet : [X,Y_0] \to [X,Y_1]$ 是群同态. 特别的, 当 $g : Y_0 \simeq Y_1$ 是同伦等价性映射是, $g_\bullet$ 为群同构;

    (a) S^1 是 $AH'I-$ 空间;
    (b) $\pi_1(Y) = [S^1,Y]$ 具有群结构;

36. 设 X,Y 是拓扑空间:

    (a) 若 X,Y 之一为 $AH'I-$ 空间, 则 $X \wedge Y$ 是 $AH'I-$ 空间;
    (b) 如果 X 是 Hausdorff 空间, 那么 Y^X 是 $AHI-$ 空间, 当且仅当 X 为 $AH'I-$ 空间或 Y 为 $AHI-$ 空间;

37. 设 X_1,X_2 都是 $AH'I-$ 空间, 则 $[X_1 \wedge X_2, Y]$ 是交换群;

    (a) 当 $n \geq 2$ 时, $\pi_n(Y)$ 是交换群;

38. 映射锥: 设 X,Y 是拓扑空间, 将其中的 X 看作约化角锥 $c(X)$ 的子空间, $X \doteq \{x \wedge 0 | x \in X\}$;

    (a) 其中记号 $x \wedge y$ 表示等价类 $[(x,y)] \in (X \times Y)/(X \vee Y) = X \wedge Y$;

39. 正合序列: 设含入映射 $i : Y \to E$, 令 $f' = \pi_f \circ i : Y \to C_f$, 对于任何拓扑空间 Z, 序列 $[C_f,Z] \xrightarrow{(f')^\bullet} [Y,Z] \xrightarrow{f^\bullet} [X,Z]$ 是正合的;