同伦群的初等计算

1. Hurewicz 定理:

   (a) 若 X 连通, $\pi_0(X)=0$, 则 $H_1(X,\mathbb{Z})\cong\pi_1(X)/[\pi_1(X),\pi_1(X)]$(基本群的阿贝尔化);

   (b) 设 $n>1$, 若 X 具有 $(n-1)-$ 连通性, 即 $\pi_0(X)=\pi_1(X)=...=\pi_{n-1}(X)=0 \Rightarrow \pi_n(X)\cong H_n(X,\mathbb{Z})$;

   (c) 球面上 $\pi_n(S^n)\cong\mathbb{Z}$;

2. Hopf 纤维化: $S^1\hookrightarrow S^3\xrightarrow{p}S^2$, 细节如下:

   (a) S^3, S^2 分别嵌入 $\mathbb{C}^2$ 及 $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ 中 $\begin{cases}S^3:|z_0|^2+|z_1|^2=1 & (z_0,z_1)\in\mathbb{C}^2\\ S^2:|z|^2+x^2=1 & (z,x)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}\end{cases}$;

   (b) 如下定义的映射 $p:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ 实际上给出了 $p:S^3\to S^2$: $\begin{cases}p(z_0,z_1)=(2z_0z_1^*,|z_0|^2-|z_1|^2)\\ |2z_0z_1^*|^2+(|z_0|^2-|z_1|^2)^2=(|z_0|^2+|z_1|^2)^2\end{cases} \Rightarrow \forall(z_0,z_1)\in S^3\subset\mathbb{C}^2$, 有 $p(z_0,z_1)\in S^2\subset\mathbb{C}\times\mathbb{R}$;

   (c) 取定 $(z,x)\in S^2$, $p(z_0,z_1)=(z,x)$ 的原像 (z_0,z_1) 构成 S^1: $\begin{cases}2z_0z_1^*=z\\ |z_0|^2-|z_1|^2=x\end{cases} \xLeftrightarrow{z_j'=e^{i\theta}z_j} \begin{cases}2z_0'z_1'^*=z\\ |z_0'|^2-|z_1'|^2=x\end{cases}$;

3. Hopf 纤维化导出的长正合序列: $...\to\pi_{n+1}(S^1)\to\pi_{n+1}(S^3)\to\pi_{n+1}(S^2)\to\pi_n(S^1)\to\pi_n(S^3)\to...$;

   (a) $n=1$: 因为 $\pi_2(S^3)=\pi_1(S^3)=0$, 所以 $0\to\pi_2(S^2)\to\pi_1(S^1)=0$, 即 $\pi_2(S^2)\cong\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}$;

   (b) $n\geq 2$: 因为 $\pi_{n+1}(S^1)=\pi_n(S^1)=0$, 所以 $0\to\pi_{n+1}(S^3)\to\pi_{n+1}(S^2)\to 0$, 即 $\pi_{n+1}(S^2)\cong\pi_{n+1}(S^3)$;

   (c) 特别的: $\pi_3(S^2)\cong\pi_3(S^3)=\mathbb{Z}$;