黎曼几何

1. 度规张量: 设 M 为 $m-$ 维光滑流形, 切空间 T_pM 中的内积是一个非退化且正定的对称双线型 $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$. 当 g_p 满足下列性质时, 称其为流形 M 的一个度规张量: $\forall U, V \in T_pM$

   (a) 对称性: $g_p(U,V) = g_p(V,U)$;

   (b) 正定性: $g_p(U,U) \geq 0$, 等号仅当 $U = 0$ 时成立;

2. 伪黎曼度规: $g_p(U,V) = 0, \forall U \Rightarrow V = 0$;

3. 度规的性质: $g_p(U,V)$ 定义了线性泛函 $T_pM \to \mathbb{R}$, 可看成余切空间的元 $\omega_U \in T_p^*M$:

   (a) $< \omega_U, V >= g_p(U,V), \forall V \in T_pM$;

   (b) $U \xrightarrow{g_p} \omega_U, g_p : T_pM \cong T_p^*M, g_p \in \mathcal{T}_p(M)^0_2$;

   (c) 分量: $g_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu, g_{\mu\nu}(p) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)$;

4. 无穷小距离:

   (a) 欧几里得空间的无穷小距离: 相邻两点 $\vec{y}, \vec{y} + d\vec{y}$ 定义了无穷小距离 $ds^2 = d\vec{y}^2 = \delta_{ij} dy^i dy^j = g_{ij}(x) dx^i dx^j$, 其中 $g_{ij} = \delta_{kl} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j}$;

   (b) 流形上的无穷小距离: 在 m 维微分流形 M 的 p 点附近覆盖以坐标片 $U \cong \mathbb{R}^m$, 局部坐标系 x^μ 下可引进 p 到其临近点的无穷小距离 $ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$. 非退化条件为 $\begin{cases} [g_{\mu\nu}]\text{正定} & Riemannian \\ \det[g_{\mu\nu}] \neq 0 & pseudo \end{cases}$;

5. 无穷小变换: 在 m 维微分流形 M 的 p 点附近, 覆盖另一个坐标片 U', 有坐标变换 $x^\mu \to x'^\mu = x'^\mu(x)$. 由 $ds^2 = g'_{\mu\nu}(x') dx'^\mu dx'^\nu$, 其中 $g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} g'_{\alpha\beta}(x')$;

6. 度规的逆变: 用 $g^{\mu\nu}$ 表示 $g_{\mu\nu}$ 的逆矩阵元, 可用 $g^{\mu\nu}$ 提升张量指标 $g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta^\lambda_\mu$;

   (a) 逆变的无穷小变换: $g'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta}(x)$;

7. 欧几里得号差: 在黎曼流形的每一点 p 处, 总是可以找到适当的坐标系将 $g_{\mu\nu}$ 对角化为 $(++...+)$, 称黎曼流形的度量有欧几里得号差;

(a) 注意: 通常不能用同一坐标系对角化不同点的 $g_{\mu\nu}$;

8. Lorentz 号差: 对于伪黎曼流形 ($\det g_{\mu\nu} \neq 0$), 如果 $g_{\mu\nu}$ 在每一点均能对角化为 $\eta_{\mu\nu} = diag(- + ... +)$, 则称该度量具有 Lorentz 号差;

9. 度规分类: 设 $(M, g_{\mu\nu})$ 是 Lorentzian 流形, 向量 $U \in T_p(M)$ 分为:

   (a) 类空向量: $g(U,U) = g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = U^\mu U_\mu > 0$;

   (b) 类光向量: $g(U,U) = U^\mu U_\mu = 0$;

   (c) 类时向量: $g(U,U) = U^\mu U_\mu < 0$;

10. 曲线的长度: 设 $c(a) = p, c(b) = q \in M$ 是曲线 $c = c_{pq}$ 的端点, 用度量确定的曲线长度 $l[c_{pq}] = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu}(\gamma(t))\frac{d\gamma^\mu(t)}{dt}\frac{d\gamma^\nu(t)}{dt}}dt$;

    (a) 参数化: 在 (U, φ) 中将曲线上的点参数化 $(x^1, ..., x^m) = \varphi \circ c(t)$, $x^\mu = \gamma^\mu(t)$;

    (b) 黎曼流形 $(M, g_{\mu\nu})$ 上两点 p, q 间的距离定义为 $\inf l[c_{pq}]$;

11. 诱导度规: 设 M 为 $m-$ 维流形, N 是一个定义了度量 $\overset{N}{g}_{\alpha\beta}$ 的 $n-$ 维流形. 若 $f: M \hookrightarrow N$ 是子流形 M 到 N 的嵌入映射 $(m \leq n)$, 拉回映射 f^* 诱导了 M 中的度量 $\overset{M}{g} = f^*\overset{N}{g}$, 分量 $\overset{M}{g}_{\mu\nu}(x) = \overset{N}{g}_{\alpha\beta}(y)\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}, y = f(x)$;

    (a) AdS 空间的诱导度量: $ds^2 = \frac{r^2}{L^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{L^2}{r^2}dr^2$;

12. 纳什嵌入定理: 只要 N 足够大, 任何黎曼流形 $(M, g_{\mu\nu})$ 都可以"等度量地"嵌入到 $(\mathbb{R}^N, \delta_{AB})$ 中, 即 $\exists f; M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, $g_{\mu\nu} = (f^*\delta)_{\mu\nu}$, 特别可取 $N \leq \begin{cases} \frac{1}{2}m(3m+11) & M\text{紧致} \\ \frac{1}{2}m(m+1)(3m+11) & M\text{非紧致} \end{cases}, m \equiv \dim M$;

13. Whitney 嵌入定理: 任何 $m-$ 维的光滑流形 M 均可作为子流形嵌入到 $\mathbb{R}^{2m+1}$ 中, 并且浸入到 $\mathbb{R}^{2m}$ 中;

14. 广义协变性: 物理/几何方程在坐标变换 $x^\mu \to x'^\mu$ 下保持形式不变, 实现协变性的方式是用张量场来表达物理/几何量 $T^{\nu_1 \cdots \nu_q}_{\mu_1 \cdots \mu_p}(x) \to T'_{\mu_1 \cdots \mu_p}{}^{\nu_1 \cdots \nu_q}(x')= \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_p}}{\partial x'^{\mu_p}} \frac{\partial x'^{\nu_1}}{\partial x^{\tau_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\nu_q}}{\partial x^{\tau_q}} \cdot T^{\tau_1 \cdots \tau_q}_{\sigma_1 \cdots \sigma_p}(x)$;

    (a) 若希望在 M 中建立微分方程, 需考虑偏微商 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, 将产生新的指标 μ, 但该指标一般不协变;

15. 使用协变量的原因: 只需在一个坐标片 $U \cong \mathbb{R}^n$ 中给出 $T^{\nu_1\cdots\nu_q}_{\mu_1\cdots\mu_p}(x)$, 其在临近坐标片 U' 中的行为就完全确定了, 进而可以定义在整个流形 M 上;

16. 联络: 设 M 上存在一个联络, ${\Gamma'}_{\nu\lambda}{}^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\lambda}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}$;

    (a) 联络的分量 $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ 在坐标变换 $x^{\mu} \to x'^{\mu}$ 下将出现非齐次项, 因此不是协变的张量;

17. 协变导数: 在 M 上给定一个联络时, 可以把非协变量 $V^{\mu}_{,\nu}$ 与 $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ 作适当的组合 $\begin{cases} V^{\mu}_{,\nu} \to V^{\mu}_{;\nu} \\ \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \equiv \partial_{\nu} \to \nabla_{\nu} \end{cases}$, 以抵消破坏协变性的非齐次项. 由此定义协变导数 $\nabla_{\nu}V^{\mu} = V^{\mu}_{;\nu} \equiv V^{\mu}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}V^{\lambda} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}V^{\lambda}$;

    (a) 余切空间的协变导数: $V_{\mu:\nu} = \nabla_{\nu}V_{\mu} \equiv V_{\mu,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu,\nu}V_{\lambda} = \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}V_{\lambda}$;

    (b) 张量场的协变导数: $\nabla_{\lambda}T^{\cdots\nu\cdots}_{\cdots\mu\cdots} = \partial_{\lambda}T^{\cdots\nu\cdots}_{\cdots\mu\cdots} - \ldots - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu}T^{\cdots\nu\cdots}_{\cdots\kappa\cdots} - \ldots + \ldots + \Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}T^{\cdots\rho\cdots}_{\cdots\mu\cdots} + \ldots$;

18. 仿射联络: 设 $\mathcal{F}(M), \mathcal{X}(M)$ 分别是流形 M 上的光滑函数和光滑向量场, 组成的空间, 可以抽象地定义仿射联络为满足下面公理的双线型映射 $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M), (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$: $\forall f \in \mathcal{F}(M), X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$

    (a) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

    (b) $\nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$;

    (c) $\nabla_{(fX)}Y = f\nabla_X Y$;

    (d) $\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y$;

19. 联络系数: $\forall p \in M$, 取坐标片 $(U, \varphi), x = \varphi(p) \in \mathbb{R}^m$, 并设 $e_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ 是 T_pM 的坐标基. m^3 个联络系数 $\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} \in \mathcal{F}(M)$ 定义为 $\nabla_{\mu}e_{\nu} \equiv \nabla_{e_{\mu}}e_{\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}e_{\lambda}$;

    (a) 一旦给出 ∇ 对基底的作用, 即可确定 $\nabla_V W, \forall V, W \in T_pM$. 即 $\nabla_V W = \nabla_{(V^{\mu}e_{\mu})}(W^{\nu}e_{\nu}) = V^{\mu}\nabla_{e_{\mu}}(W^{\nu}e_{\nu}) = V^{\mu}(e_{\mu}[W^{\nu}]e_{\nu} + W^{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}e_{\lambda}) = V^{\mu}\left(\frac{\partial W^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}W^{\nu}\right)e_{\lambda}$;

    (b) 协变量的分量形式: $\nabla_{\mu}W^{\lambda} \equiv \frac{\partial W^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}W^{\nu}$;

(c) Leibnitz 法则: $\forall f \in \mathcal{F}(M)$, 令 $\nabla_X f = X[f]$, 则有 $\nabla_X(f \cdot Y) = \nabla_X f \cdot Y + f \cdot \nabla_X Y$;

i. 推广到一般张量: $\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2)$;

ii. 分量形式: $\nabla_\mu (T^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\nu\cdots} \cdot \tilde{T}^{\cdots\rho\cdots}_{\cdots\kappa\cdots}) = (\nabla_\mu T^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\nu\cdots}) \cdot \tilde{T}^{\cdots\rho\cdots}_{\cdots\kappa\cdots} + T^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\nu\cdots} \cdot \nabla_\mu \tilde{T}^{\cdots\rho\cdots}_{\cdots\kappa\cdots}$;

(d) 不同坐标片 $U \cap V \neq \phi$ 中的联络系数变换关系: $x^\mu \to x'^\mu$;

i. $e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, e'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} e_\alpha$;

ii. $\nabla_{e'_\mu} e'_\nu = {\Gamma'}_{\mu\nu}{}^\lambda e'_\lambda = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda}{\Gamma'}_{\mu\nu}{}^\lambda e_\gamma$, 且 $\nabla_{e'_\mu} e'_\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\nabla_{e_\alpha}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} e_\beta\right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\nabla_{e_\alpha} e_\beta + \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} e_\beta$;

iii. ${\Gamma'}_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma}\frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}$;

20. 方向导数: 对于欧式空间 $M = \mathbb{M}^m$, 此时 $T_pM \cong M$, 即流形上的点 $x \in M$ 和切向量 $X, Y \in T_pM$ 都是 $\mathbb{R}^m$ 中的向量. 方向导数定义为 $\nabla_X Y = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \frac{Y(x+\epsilon X) - Y(x)}{\epsilon} = X^\mu \partial_\mu (Y^\nu)\partial_\nu$, 其是 $\mathbb{R}^m$ 上的联络;

(a) 特别的有: $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} e_\lambda = \nabla_{e_\mu} e_\nu = 0 \Rightarrow \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$;

(b) 推论: $\mathbb{R}^m$ 上存在零联络 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$;

21. 平行: 设 $c: [a,b] \to M, t \mapsto c(t)$ 是 M 中连结 $p = c(a)$ 和 $q = c(b)$ 的一条光滑曲线, 取坐标片 (U, φ), 曲线的参数方程为 $x^\mu = \gamma^\mu(t)$, 其中 $\begin{cases} (\gamma^1(t), ..., \gamma^m(t)) \equiv \varphi \circ c(t) \\ \gamma^\mu(a) = p^\mu \\ \gamma^\mu(b) = q^\mu \end{cases}$,切向量满足 $\begin{cases} \dot\gamma(t) = \dot\gamma^\mu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{c(t)} \\ \dot\gamma^\mu = \frac{d\gamma^\mu(t)}{dt} = \frac{dx^\mu}{dt} \end{cases}$. 若 X 满足 $\begin{cases} \nabla_{\dot\gamma(t)} X = 0 & \forall t \in [a,b] \\ \dot\gamma^\mu(t)\left(\frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} X^\nu\right) = 0 & \Rightarrow \frac{d}{dt}X^\lambda(x) + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{dt}X^\nu(x) = 0 \end{cases}$, $x^\mu = \gamma^\mu(t)$, 则称 M 上的向量场 X 沿着曲线 $c(t)$ 是平行的;

22. 设 $\gamma: [a,b] \to M$ 是任意的光滑曲线, $\forall t_0 \in [a,b]$ 以及 $X_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, 存在唯一的沿 γ 平行向量场 X 满足条件 $X(\gamma(t_0)) = X_0$;

(a) 平行移动: $P^\gamma_{t_0,t}: T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t)}M, X_0 = X(\gamma(t_0)) \mapsto X(\gamma(t))$;

i. $P^\gamma_{t_0,t}$ 是线性映射;

ii. $P^\gamma_{t_0,t}$ 是可逆映射: $P^\gamma_{t_0,t} \circ P^{-\gamma}_{a+b-t,a+b-t_0} = 1$, $(-\gamma)(s) \equiv \gamma(a+b-s)$;

23. 设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是一条光滑曲线, 满足 $\gamma(t_0)=p$ 及 $\dot{\gamma}(t_0)=X_0\in T_pM$, 则对于任意向量场 $Y\in\mathcal{X}(M)$, 有 $\nabla_{X_0}Y(p)=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{(P^{\gamma}_{t_0,t})^{-1}[Y(\gamma(t))]-Y(\gamma(t_0))}{t-t_0}$;

24. 测地线: $x^\mu=\gamma^\mu(t)$ 的切向量 $V=\dot{\gamma}(t)$ 沿着曲线处处平行 $\nabla_V V=0$, 即 $\frac{d^2x^\lambda}{dt^2}+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}=0$;

25. 向量的夹角: 内积 $g_p(U,V)=g_{\mu\nu}U^\mu V^\nu$ 确定向量 $U,V\in T_pM$ 的夹角;

26. 与度量相容的平行移动: 与度量相容的平行移动应保持夹角不变, 即若 $\nabla_{\dot{\gamma}}U=\nabla_{\dot{\gamma}}V=0$, 则 $\nabla_{\dot{\gamma}}[g(U,V)]=0\Rightarrow\nabla_\lambda g_{\mu\nu}=0$;

27. 与度量相容的联络系数: $g_{\mu\nu,\lambda}-\Gamma^\rho_{\lambda\mu}g_{\rho\nu}-\Gamma^\rho_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}=0$;

28. Christoffel 记号: $\left\{{\kappa \atop \mu\;\nu}\right\}=\frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(g_{\lambda\nu,\mu}+g_{\lambda\mu,\nu}-g_{\mu\nu,\lambda})$;

29. 联络系数对称化和反称化: $\begin{cases}\Gamma^\rho_{(\mu\nu)}\equiv\frac{1}{2}(\Gamma^\rho_{\mu\nu}+\Gamma^\rho_{\nu\mu})\\ \Gamma^\rho_{[\mu\nu]}\equiv\frac{1}{2}(\Gamma^\rho_{\mu\nu}-\Gamma^\rho_{\nu\mu})\end{cases}$;

30. 挠率张量: 联络系数的反称部分被称为挠率张量, 是一个协变量. $T^\rho_{\mu\nu}\equiv 2\Gamma^\rho_{[\mu\nu]}=\Gamma^\rho_{\mu\nu}-(\mu\leftrightarrow\nu)$;

31. 挠率: $T:\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\to\mathcal{X}(M)$, 定义为 $T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y],\forall X,Y\in\mathcal{X}(M)$;
    (a) 挠率的分量: $T^\lambda_{\mu\nu}=\left\langle dx^\lambda,T(e_\mu,e_\nu)\right\rangle$, 为 $(2,1)-$ 型张量;
    (b) 挠率张量 $T^\lambda_{\mu\nu}$ 是挠率 T 在标准基底下的分量;

32. Contorsion 张量: $K^\kappa_{\mu\nu}\equiv\frac{1}{2}(T^\kappa{}_{\mu\nu}+T_\mu{}^\kappa{}_\nu+T_\nu{}^\kappa{}_\mu)$;
    (a) 联络系数可表示为 $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}=\left\{{\kappa \atop \mu\;\nu}\right\}+K^\kappa_{\mu\nu}$;

33. Levi-Civita 联络: 当联络系数下指标对称时, 挠率为零 (进而 Contorsion 张量为零), 这时与度量相容的联络为 Levi-Civita 联络. 其联络系数等于 Christoffel 记号 $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}=\left\{{\kappa \atop \mu\;\nu}\right\}=\frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(g_{\lambda\mu,\nu}+g_{\lambda\nu,\mu}-g_{\mu\nu,\lambda})$;

34. 曲线长度: 连结 M 上 p,q 两点的曲线 $x^\mu=x^\mu(t)$ 的长度为 $l[x]=\int_a^b\sqrt{g_{\mu\nu}(x(t))\frac{dx^\mu(t)}{dt}\frac{dx^\nu(t)}{dt}}dt$;
    (a) 最短程线: 由变分原理 $\frac{\delta l[x]}{\delta x^\lambda}=0$ 给出, 即 $\frac{d^2x^\kappa}{ds^2}+\left\{{\kappa \atop \mu\;\nu}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}=0$;
        i. 测地线方程中将 $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$ 取 Levi-Civita 联络;

35. 曲率: 流形 M 的取率定义为 $R:\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\to\mathcal{X}(M)$, 即 $R(X,Y,Z)=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z=[\nabla_X,\nabla_Y]Z-\nabla_{[X,Y]}Z$, $\forall X,Y,Z\in\mathcal{X}(M)$. 曲率张量可以描述空间的弯曲程度;
    (a) 曲率 R 是张量, 具有多重线性 $R(fX,gY,hZ)=fghR(X,Y,Z)$;
    (b) 曲率张量的分量: $R(X,Y,Z)=X^\mu Y^\nu Z^\lambda R(e_\mu,e_\nu,e_\lambda)\equiv X^\mu Y^\nu Z^\lambda R^\kappa_{\lambda\mu\nu}e_\kappa$
    (c) 曲率为 $(1,3)-$ 型张量, 可展开为联络的导数与二次项的组合 $R^\kappa_{\lambda\mu\nu}=\partial_\mu\Gamma^\kappa_{\nu\lambda}-\partial_\nu\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}+\Gamma^\kappa_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\lambda}-\Gamma^\kappa_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\lambda}$;
36. Ricci 张量: 一种 $(0,2)-$ 型张量, 定义为 $Ric(X,Y)=<dx^\kappa,R(e_\kappa,Y,X)>$, $R_{\mu\nu}=Ric(e_\mu,e_\nu)=R^\kappa_{\mu\kappa\nu}$;
    (a) 标量曲率: $R=g^{\mu\nu}Ric(e_\mu,e_\nu)=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$;
37. 等度量群: 设 $(M,g_{\mu\nu})$ 是黎曼流形, $f\in Diff(M)$. 等度量群是微分同胚群的一个子群 $Isom(M):=\{f\in Diff(M)|(f^*g)_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}\}$. 其中 $\begin{cases} f^\mu(x)\approx x^\mu+\xi^\mu(x)+...\in Diff_0(M) & \xi\in\mathcal{X}(M) \\ (f^*g)\approx g_{\mu\nu}+(\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu}+... \end{cases}$;
    (a) Killing 矢量: 生成等度量群的向量为 Killing 矢量, $(\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu}=0\Leftrightarrow\nabla_\mu\xi_\nu+\nabla_\nu\xi_\mu=0$;
    (b) 共形 Killing 矢量方程: 在流形 M_{d+1} 中, 当时空变换 $f\in Diff(M_{d+1})$ 由无穷小向量场 ξ(称为共形 Killing 矢量场) 生成时, 有 $\delta_\xi g_{ab}\equiv(f^*g)_{ab}-g_{ab}=-(\nabla_a\xi_b+\nabla_b\xi_a)+O(\xi^2)$. 若时空变换对度量产生了一个 Weyl 因子 $e^{2\omega}$, 则 $(f^*g)_{ab}-g_{ab}=(e^{2\omega}-1)\cdot g_{ab}=2\omega\cdot g_{ab}+O(\omega^2)$. 生成边界时空对称性的向量场 ξ 应满足共形 Killing 矢量方程 $\nabla_a\xi_b+\nabla_b\xi_a=-2\omega\cdot g_{ab}\Rightarrow\begin{cases}\nabla^a\xi_a=-(d+1)\cdot\omega \\ \nabla_a\xi_b+\nabla_b\xi_a-\frac{2}{d+1}(\nabla^c\xi_c)g_{ab}=0\end{cases}$;
38. 共形平坦: 对于黎曼流形 M, 如果存在坐标系使得其中的度量分量 $g_{\mu\nu}(x)=\rho(x)\eta_{\mu\nu}$, 则称黎曼流形 M 是共形平坦的;
39. 活动标架基: 设 M 是一个 $m-$ 维黎曼流形, 其在 p 点的切空间 T_pM 的坐标基为 $e_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}$. 用可逆矩阵转动这些基, 可得新的基底 $\hat{e}_a=e^\mu_a e_\mu=e^\mu_a\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, 其中 $[e^\mu_a]\in GL[m,\mathbb{R}]$, $\det[e^\mu_a]>0$;
    (a) 活动标架的度规: $g(\hat{e_a},\hat{e}_b)=e^\mu_a e^\nu_b g(\frac{\partial}{\partial x^\mu},\frac{\partial}{\partial x^\nu})=g_{\mu\nu}e^\mu_a e^\nu_b$;

(b) 活动标架的仿射联络: $\Gamma^c_{ab} = e^\mu_a e^c_\lambda(\partial_\mu e^\lambda_b + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} e^\nu_b)$;

(c) 标架基下的挠率: $T^c_{ab} = e^c_\lambda T^\lambda_{\mu\nu} e^\mu_a \hat{e}_b$;

(d) 标架基下的曲率张量分量: $R^a_{bcd} = e^a_\rho R^\rho_{\lambda\mu\nu} e^\lambda_b e^\mu_c e^\nu_d$;

40. Cartan 结构方程: $\begin{cases} d\theta^a + \omega^a_b \wedge \theta^b = T^a \\ d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b = R^a_b \end{cases}$;

(a) 规范对称性: 度量在局部 Lorentz 转动下不变;

41. 活动标架的 Levi-Civita 联络: $\begin{cases} metricity & \nabla_X g = 0 \\ vanishing\ torsion & \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = 0 \end{cases}$, $\Gamma^c_{ab} = e^c_\lambda e^\mu_a \nabla_\mu e^\lambda_b$;

42. 活动标架的变分规则:

(a) $\delta_\theta \mathbb{V}_{a_1\ldots a_m} = \delta\theta^b \wedge \mathbb{V}_{a_1\ldots a_m b}$, $\delta_{\omega^L} \mathbb{V}_{a_1\ldots a_m} = 0$;

(b) $\delta_\theta T^a = d\delta\theta^a + \omega^{La}_b \wedge \delta\theta^b = D^L \delta\theta^a$;

(c) $\delta_\theta R^{Lab} = 0$;

(d) $\delta_{\omega^L} T^a = \delta\omega^{La}_b \wedge \theta^b$;

(e) $\delta_{\omega^L} R^{Lab} = d\delta\omega^{Lab} + \delta\omega^{La}_c \wedge \omega^{Lcd}, -\delta\omega^{Lcd} \wedge \omega^{La}_c = D^L \delta\omega^{Lab}$;

(f) $\delta_\theta \omega = \delta\theta^a P_a$, $\delta_{\omega^L} \omega = \frac{1}{2}\delta\omega^{Lab} M_{ab}$, $\delta_\theta \hat{R} = \delta_\theta T^a P_a = D^L \delta\theta^a P_a$, $\delta_{\omega^L} \hat{R} = \delta\omega^{La}_b \wedge \theta^b P_a + \frac{1}{2} D^L \delta\omega^{Lab} M_{ab}$. 其中 $\omega = \theta^a P_a + \frac{1}{2}\omega^{Lab} M_{ab}$ 为 Poincare 联络, $\hat{R} := d\omega + \omega \wedge \omega$;