复流形

1. 全纯复函数 (解析性): 函数 $f = u(x, y) + iv(x, y)$ 的实部和虚部有适当的光滑性, 并满足柯西-黎曼条件 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$, 则称其为全纯复函数;
   (a) 对于全纯复函数 $f(x, y)$, 若 $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$, 则 f 只依赖 z;
   (b) 多变量的全纯复函数: 设 $(z^1, ..., z^m) \in \mathbb{C}^m$, $z^\mu := x^\mu + iy^\mu$, 复值函数 $f = \mu + i\nu : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ 的全纯性由 $\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \nu}{\partial y^\mu} \\ \frac{\partial \mu}{\partial y^\mu} = -\frac{\partial \nu}{\partial x^\mu} \end{cases}$ 刻画. 若每个分量函数 $f^\lambda (1 \leq \lambda \leq n)$ 都是全纯函数, 则映射 $(f^1, ..., f^n) : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ 是全纯的;
2. 复流形: 满足下面条件的流形被称为复流形;
   (a) M 是拓扑空间, 即其中定义了开集 $U, V, ...$;
   (b) M 上带有一套坐标卡集 $(U_i \varphi_i)$, 其中 $\{U_i\}$ 构成 M 的一个开覆盖, φ_i 是从开集 U_i 到 $\mathbb{C}^m$ 中某个开集的同胚映射;
   (c) 在开覆盖中任取有交叠的开集 U_i, U_j(即 $U_i \cap U_j \neq \phi$), 转移函数 $\psi_{ij} \equiv \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ 是全纯映射;
3. 近复结构: 设 M 是微分流形, 假定其上存在 $(1, 1)$ 型张量场 $J = J^A_B(x) \frac{\partial}{\partial \xi^A} \otimes d\zeta^B$, 该类型张量可看作线性算子 $T_pM \xrightarrow{J} T_pM$, $V = V^A \frac{\partial}{\partial \zeta^A} \mapsto < J, V >= J^A_B V^B \frac{\partial}{\partial \zeta^A}$, 则 J 称为 M 上的一个近复结构;