1 拓扑空间

1. 拓扑: 对于点集 X,$\tau = \{U_i|i \in I\}$ 是由 X 中的一系列子集构成的集合, 若 (X, τ) 是一个拓扑空间 (τ 定义了 X 的一个拓扑), 则下列条件得到满足:

   (a) $X, \phi \in \tau$;

   (b) 若 $J \subseteq I$ 是指标集 I 的任意子集, 则 $\cup_{j \in J} U_j \in \tau$;

   (c) 若 $K \subseteq I$ 是 I 的任意有限子集, 则 $\cap_{k \in K} U_k \in \tau$;

2. 常用拓扑:

   (a) 平庸拓扑: $\tau' = \{\phi, X\}$;

   (b) 离散拓扑: $\tau'' = \{U|\forall U \subseteq X\}$;

3. 连续: 设 X 和 Y 都是拓扑空间, 如果 Y 中每个开集 U 的原像 $f^{-1}(U)$ 都是 X 中的一个开集, 则映射 $f : X \to Y$ 称为连续的;

   (a) 映射 $f : X \to Y$ 在 $x_0 \in X$ 处连续的定义为: $(\forall \varepsilon, \exists \delta, f\left(U_\delta(x_0)\right)) \subset U_\varepsilon\left(f(x_0)\right)$ 使得 $\forall U_\varepsilon(f(x_0)), \exists U_\delta(x_0), x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$ 成立;

4. 同胚: 对于映射 $f : X \to Y$, 若 f, f^{-1} 都是连续映射, 则拓扑空间 X 与 Y 是同胚的;

5. 拓扑的强弱: 设 $\tau_{1,2}$ 是 X 上定义的两个拓扑, 当 $\tau_1 \subset \tau_2$ 时称拓扑 τ_1 强于拓扑 τ_2;

6. Hausdorff 空间: 空间中任意两个不同的点有不相交的开邻域, 即: $\forall x \neq x' \in X, \exists$ 邻域 $O : x \in O, x' \in O'$, 满足 $O \cap O' = \phi$;

7. 覆盖及开覆盖: 设 (X, τ) 是拓扑空间, 其子集族 $\{A_i|i \in I\}$ 或开集族 $\{U_i|i \in I\} \subseteq \tau$ 构成 X 的覆盖或开覆盖, 若 $\cup_{i \in I} A_i = X$ 或 $\cup_{i \in I} U_i = X$;

   (a) 紧致性: X(或其子集 A) 的任一开覆盖中都存在有限的子覆盖 $\{U_i|j \in J \subseteq I, |J| < \infty\}$, 称 X(或 A) 紧致;

8. 连通性: 拓扑空间 X 称为连通的, 当且仅当该空间不能写成 $X = X_1 \cup X_2$ 的形式, 这里 X_1 和 X_2 是两个不相交的非空开集 $X_1 \cap X_2 = \varphi$;

(a) 不连通的拓扑空间可以用其各个连通分支的并表示;

(b) 道路连通: $\forall x, y \in X, \exists f : [0, 1] \rightarrow X$ 使得 $f(0) = x, f(1) = y$;

(c) 回路: $f : [0, 1] \rightarrow X$ 使得 $f(0) = f(1)$;

(d) 单连通: 若 X 中的任一条回路都可以连续地形变收缩成一点, 就称 X 是单连通的;

2 流形

1. 流形: 设 M 是一个 Hausdorff 空间; $\forall p \in M$, 如果存在一个开邻域 $O : p \in O$ 与 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 中的一个开集同胚, 就称 M 为实或复的 $n-$ 维流形;

2. 微分流形: 设 M 是一个流形, 若同时满足:

   (a) 存在开覆盖 $\{U_i | i \in I\}, \varphi_i : U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \in R^n, \varphi^{-1} : \varphi_i(U_i) \rightarrow U_i \subset M$;

   (b) 当 $U_i \cap U_j \neq \phi$, 下列映射是 C^∞ 可微的: $\psi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$;

3. 等价关系: 关系 $A \sim B$ 是一个等价关系, 若同时满足:

   (a) 自反性: $A \sim A$;

   (b) 对称性: $A \sim B, B \sim A$;

   (c) 传递性: $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$;

4. 坐标卡: (U_i, φ_i) 给出微分流形的坐标卡;

   (a) 卡集: 坐标卡的全体称为卡集;

   (b) 坐标邻域: $p \in U_i$, 则 U_i 为在 p 点的坐标邻域;

   (c) 坐标函数: φ_i, 坐标函数在 p 点处的值记为 $x^\mu(p)$,$1 \leq \mu \leq n$;

   (d) 卡集相容: 如果两个卡集的并仍然是卡集, 则称它们相容;

      i. 相容性是一种等价关系;

5. $\mathbb{R}^n$ 上的 $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ 到 n 维单位球面 $S^n : \{x_i \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ 上 $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1})$ 的球极投影:

(a) 自北极 $(0,0,...,0,1)$ 的 (南多半球) 球极投影: $y_i = \frac{x_i}{1-x_{n+1}}, ||y||^2 = \frac{1+x_{n+1}}{1-x_{n+1}}, x_i = \frac{2y_i}{||y||^2+1}, x_{n+1} = \frac{||y||^2-1}{||y||^2+1}$;

i. 南多半球: $U_+ = S^n \backslash \{(0,0,...,0,-1)\} = \{(x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1} \in S^n | x_{n+1} \neq -1)\}$;

ii. $(U_\pm, \varphi_\pm)$ 坐标函数: $\varphi_+ : U_+ \to \mathbb{R}^n, (x_1,...,x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}},...,\frac{x_n}{1+x_{n+1}}\right)$;

(b) 自南极 $(0,0,...,0,-1)$ 的 (北多半球) 球极投影: $y_i = \frac{x_i}{1+x_{n+1}}, ||y||^2 = \frac{1-x_{n+1}}{1+x_{n+1}}, x_i = \frac{2y_i}{||y||^2+1}, x_{n+1} = \frac{1-||y||^2}{1+||y||^2}$;

i. 北多半球: $U_- = S^n \backslash \{(0,0,...,0,+1)\} = \{(x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1} \in S^n | x_{n+1} \neq 1)\}$;

ii. $(U_\pm, \varphi_\pm)$ 坐标函数: $\varphi_- : U_- \to \mathbb{R}^n, (x_1,...,x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},...,\frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$;

6. 等价类: 满足同样等价关系的一类关系;

(a) 微分结构: M 所有卡集按照等价类可划分为不同的类, 每个类对应一个微分结构; 即相容的卡集定义了 M 上相同的微分结构;

7. 齐次坐标: 在 n 维实射影空间 $\mathbb{R}P^n$ 中, 由 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中所有过原点的直线 $(x^0,x^1...,x^n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 且 $(x^0,x^1...,x^n) \neq (0,0,...,0)$, 则称该直线为 $\mathbb{R}P^n$ 的齐次坐标;

(a) 非齐次坐标: 设 U_i 为所有过原点的齐次坐标 $x^i \neq 0$ 的直线集, 定义非齐次坐标 $\xi^j_{(i)} = \frac{x^j}{x^i}$, 即 $\xi_{(i)} = (\xi^0_{(i)}, \xi^1_{(i)},...,\xi^{i-1}_{(i)},\xi^{i+1}_{(i)},...,\xi^n_{(i)})$. 其中 $\xi^i_{(i)} = 1$ 被省略;

i. U_i 中的非齐次坐标实际与齐次坐标的选择无关: 若 $x = \lambda y$, 则有 $\frac{x^j}{x^i} = \frac{y^j}{y^i} = \xi^j_{(i)}$;

ii. 非齐次坐标提供了 U_i 与 $\mathbb{R}^n$ 之间的同胚 $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$;

(b) 卡集 $\{U_i | 0 \leq i \leq n\}$ 的转移函数 ψ_{ij}: 当 $U_i \cap U_j \neq \phi$,

$$x = (x^0,...,x^n) \in U_i \cap U_j \begin{cases} \varphi_i(x) = \xi_{(i)} \in \varphi_i(U_i \cap U_j) \\ \varphi_j(x) = \xi_{(i)} \in \varphi_j(U_i \cap U_j) \end{cases}$$

$\psi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \xi^k_{(j)} \mapsto \xi^k_{(i)} = \frac{x^j}{x^i} \cdot \xi^k_{(j)}$

i. 转移函数 ψ_{ij} 与 $U_i \cap U_j$ 中点的齐次坐标的选择无关: $x = \lambda y \Rightarrow \frac{x^j}{x^i} = \frac{y^j}{y^i}$;

8. 一般线性群: n 维一般线性群是 $n \times n$ 维可逆矩阵的集合, 记为 $GL(n, \mathbb{R})$;

9. 笛卡尔积: $X \times Y = \{(x, y)|x \in X \bigwedge y \in Y\}$;
10. 流形的乘积: 设 $M, \tilde{M}$ 分别为 $n, \tilde{n}$ 维微分流形, 各自定义了坐标卡集 $\{(U_i, \varphi_i)\}, \{(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)\}$. 则乘积流形 $M \times \tilde{M}$ 是一个 $n + \tilde{n}$ 维微分流形, 卡集为 $\{U_i \times \tilde{U}_\alpha, (\varphi_i, \tilde{\varphi}_\alpha)$;
11. 环面: $T^n = S^1 \times S^1 \times ... \times S^1$;
12. 封闭群的要素:
    (a) 单位元: I;
    (b) 逆元: 元 A 与其逆元 A^{-1} 之集为单位元 I;
    (c) 满足结合律的乘法 $< u, v >$: 在该乘法下, 构成封闭群;
13. 矩阵构成的李群:
    (a) 一般线性群 $GL(n, \mathbb{C})$;
    (b) 幺正群 $U(n)$ 和 $U(p, q)$: 保持 $n-$ 维复向量空间 $V \cong \mathbb{C}^n$ 的内积不变的变换;
        i. $< u, v >= \bar{u}^T \cdot v = \sum\limits_{j=1}^{n} \bar{u}_j v^j$;
        ii. $< u, v >_{p,q}= -\sum\limits_{i=1}^{p} \bar{u}_i v^i + \sum\limits_{j=1}^{q} \bar{u}_{p+j} v^{p+j}$;
    (c) 特殊幺正群 $SU(p, q) = U(p, q) \cap SL(n, \mathbb{C})$;
    (d) 正交群 $O(n)$: 在实数集上保持欧几里得内积不变的变换;
    (e) 特殊正交群 $SO(p, q) = O(p, q) \cap SL(n, \mathbb{R})$;
    (f) 辛群 $Sp(2n, \mathbb{C})$: 保持向量 $y, z \in \mathbb{C}^{2n}$ 或 $\mathbb{R}^{2n}$ 的斜积 $\omega(y, z)$ 不变的变换:
        i. $\omega(w, z) = \sum\limits_{j=1}^{n} (w_j z'_j - w'_j z_j)$;
    (g) 幺正辛群 $USp(2n) = Sp(2n, \mathbb{C}) \cap U(2n)$;
14. 矩阵的指数映射: 设 A 是 $n \times n$ 矩阵, 指数 e^A 来自幂级数 $e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + ... = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$;
15. Pauli 矩阵: $\sigma_k = \begin{pmatrix} \delta_{a3} & \delta_{a1} - i\delta_{a2} \\ \delta_{a1} + i\delta_{a2} & -\delta_{a3} \end{pmatrix}, k = 0, 1, 2, 3$;

16. Lie 群流形: $(\xi_a)_{a=1,\ldots,dimG} \in \mathbb{R}^{dimG}$,通过指数映射 $g = \exp\left(i\sum_{a=1}^{dimG}\xi_a T^a\right) \in G, T^a \in g$;

3 流形上的微积分

1. 流形间的光滑映射: 微分流形维数 $dimM = m, dimN = n$, 映射 $f : M \to N$ 的坐标表达满足: M 的卡集 $\{U_i, \varphi_i\}$, N 的卡集 $\{V_j, \psi_j\}$, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$;
   (a) 简化记号: $y = f(x) = \psi \circ f \circ \psi^{-1}(x)$;
   (b) 光滑映射条件: 若从 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射 $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ 是 $\mathbb{C}^\infty$ 的, 则称 f 为可微映射 (或光滑映射);
   (c) 可微性与坐标系的选择无关;
2. 微分同胚映射: 设 $f : M \to N$ 是流形之间的同胚映射, 若 $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ 及 $x = \varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(y)$ 均是 $\mathbb{C}^\infty$, 则 f 是从 M 到 N 的微分同胚映射;
   (a) 微分同胚的流形: 设 $f : M \to N$ 是流形之间的微分同胚映射, 则 M, N 称为微分同胚的流形, 记为 $M \cong N$;
   (b) 微分同胚是一种等价关系;
   (c) M 到自身的微分同胚映射 $f : M \to M$ 记作 $Diff(M)$;
3. 李群: 若流形 G 为光滑流形, 且乘法和逆运算都是光滑映射 $m : G \times G \to G, m(g,h) := gh, i : G \to G, i(g) = g^{-1}$;
   (a) 等价命题: 设 G 是具有群结构的光滑流形, 如果映射 $f : G \times G \to G, (g,h) \mapsto gh^{-1}$ 是光滑的, 则 G 构成李群;
   (b) 左作用与右作用: $L_g, R_g : G \to G, L_g(g) = gh, R_g(h) = hg$;
4. 光滑映射 (函数): M 上的函数 f 定义为从 M 到 $\mathbb{R}$ 的光滑映射, 在坐标卡 (U, φ) 上, 函数 f 的局部表达为 $m-$ 变元的实值函数 $f \circ \varphi^{-1} : R^m \to R$;
   (a) 光滑函数全体以 $\mathcal{F}(M)$ 记;

5. 切向量: M 上的向量由某条曲线 $c:(a,b)\to M$ 的切向描述. 设 $f:M\to\mathbb{R}$ 是光滑函数, f(c(t)) 定义了函数 $(a,b)\to\mathbb{R}$. 在 $t=0\in(a,b)$ 处, 函数 $f(c(t))$ 的变化率为 $\frac{df(c(t))}{dt}|_{t=0}=\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu(c(t))}{dt}|_{t=0}$(为了方便, 可以滥用记号 $\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^\mu}$ 为 $\frac{df}{dx^\mu}$);
   (a) 函数空间上的微分算子: 作用在函数上的微分算子定义为 $X\equiv X^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, 其中 $X^\mu=\frac{dx^\mu(c(t))}{dt}|_{t=0}$. 变化率可以记为 $\frac{df(c(t))}{dt}|_{t=0}=X^\mu\frac{\partial f}{\partial x^\mu}=X[f]$;
      i. 微分算子 $X=X^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 定义了曲线 $c(t)$ 在点 $p=c(0)\in M$ 处的切向量;
      ii. $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 可以作为向量的基, X^μ 为切向量在这个基底下的分量;
   (b) 曲线与切向量之间的对应是多对一的: 若 $c_1(t),c_2(t)$ 由相同的初始值 $(c_1(0)=c_2(0)=p)$ 和变化率 $(\frac{dx^\mu(c_1(t))}{dt}|_{t=0}=\frac{dx^\mu(c(t))}{dt}|_{t=0})$, 则它们定义的切向量相同;
      i. 切空间: M 中过 p 点的曲线的等价类 $1:1$ 对应于 p 处的一个切向量, 其全体构成切空间 T_pM;
      ii. 切空间的基: $e_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu},1\le\mu\le m$ 是 T_pM 的一组基 (坐标基), 有 $\dim T_pM=\dim M$;
   (c) 切向量的构造与坐标系的选择无关: 设 $p\in U_i\cap U_j$ 的坐标为 $x^\mu=X^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}=\tilde{X}^\mu\frac{\partial}{\partial y^\mu}\Rightarrow X^\nu\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}$;
      i. 不同坐标系下的微分算子相差一个雅可比矩阵;

6. 基变换: 利用矩阵 $A=(A_i^\mu)\in GL(m,\mathbb{R})$, 可以定义基变换 $e_\mu\to\hat{e}_i=A_i^\mu e_\mu$. 其中 $\hat{e_\mu}$ 为非坐标基;

7. 线性泛函: 对于线性泛函 $f\in V, f(\lambda_1\cdot v_1+\lambda_2\cdot v_2)=\lambda_1 f(v_1)+\lambda_2 f(v_2)$;

8. 对偶空间: 实向量空间 V 的对偶空间 V^* 定义为线性泛函 $f:V\to\mathbb{R}$ 的全体. 任意 $f\in V^*$ 完全由它在 V 中的某组基 e_i 上的值 $f(e_i)$ 确定, $v=\sum_i\lambda^i e_i\Rightarrow f(v)=\sum_i\lambda^i f(e_i)$, f 与 $\{f(e_i)\}$ 处于同一等价类;
   (a) 对偶基: 设 $e^i\in V^*$ 满足 $e^i(e_j)=\delta^i_j$, 则任意 $f\in V^*$ 可写成 e^i 的线性组合, 故 $\{e^i\}$ 形成 V^* 的基, 称为 e_i 的对偶基, $\bar{f}=\sum_j f(e_j)e^j\Leftrightarrow\bar{f}(e_i)=\sum_j f(e_i)\delta^j_i=f(e_i)\Leftrightarrow\bar{f}=f,\dim V^*=\dim V$;

(b) 内积空间 V, e_i 具有幺正性 $< e_i, e_j >= \delta_{ij} \Rightarrow < e_i, \cdot >= e^i(\cdot)$;

9. 余切空间: 切空间 T_pM 的对偶空间 T_p^*M 称为余切空间;

   (a) 切空间中坐标基 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 的对偶基记作 $dx^\mu, dx^\mu(\frac{\partial}{\partial x^\nu}) =< dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} >= \delta^\mu_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}$;

      i. 对偶基可以作为微分: $< df, \frac{\partial}{\partial x^\nu} >=< \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} >= \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \Rightarrow < df, X >= X[f]$;

   (b) 余切空间中的任一元可写成微分 1− 形式 $\omega = \omega_\mu dx^\mu, < \omega, X^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} >= \omega_\mu X^\mu$;

   (c) 余切空间的元 ω 无需参考任何坐标系: 设 $p \in U_i \cap U_j$, $\omega = \omega_\mu dx^\mu = \tilde{\omega}_\nu dy^\nu \Rightarrow \tilde{\omega}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\omega_\mu$;

      i. 不同坐标系下余切空间的元 ω 差一个雅可比矩阵的“逆矩阵”;

10. 张量积: 向量空间 V, W 的张量积 $V \otimes W$ 可以看作 $V \times W$ 模去一组等价关系: 设 $(v, w) \in V \times W$, 等价关系 $\begin{cases} (v_1 + v_2, w) \sim & (v_1, w) + (v_2, w) \\ (v, w_1 + w_2) \sim & (v, w_1) + (v, w_2) \\ \lambda \cdot (v, w) = & (\lambda \cdot v, w) = (v, \lambda \cdot w) \end{cases}$, 则张量积定义为 $V \otimes W \equiv V \times W / \sim$;

   (a) 张量积 $V \otimes W$ 中元素 $v \otimes w$ 的性质: $\begin{cases} (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \otimes w = & \lambda_1 (v_1 \otimes w) + \lambda_2 (v_2 \otimes w) \\ v \otimes (\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = & \lambda_1 (v \otimes w_1) + \lambda_2 (v \otimes w_2) \end{cases}$;

   (b) 若 e_i, f_α 分别构成 V, W 的基, 则 $e_i \otimes f_\alpha$ 构成 $V \otimes W$ 的基, 故 $\dim V \otimes W = \dim V \otimes \dim W$;

11. $(q, r)-$ 型张量空间: 在 $p \in M$ 点处的 $(q, r)-$ 型张量空间定义为:$T_p(M)^q_r = \otimes_q T_p(M) \otimes_r T_p^*(M), T \in T_p(M)^q_r \Rightarrow T^{\mu_1 \cdots \mu_q}_{\nu_1 \cdots \nu_r} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes ... \otimes dx^{\nu_r}$;

   (a) 张量 T 在坐标变换 $x^\mu \to y^\mu = y^\mu(x)$ 下是协变的;

   (b) 向量场: 当点 p 在 M 中变动, 若相应的向量 V 光滑地变动, 就称 V 是 M 上的一个向量场; $\forall f \in \mathcal{F}(M) \Rightarrow V[f] \in \mathcal{F}[M]$;

      i. 向量场 X 在 p 点处的值 $X|_p \in T_p(M)$;

   (c) $(q, r)-$ 型张量场: $(q, r)-$ 型张量场的全体记作 $T^q_r(M)$;

12. 微分映射: 光滑映射 $f: M \to N$ 诱导的微分映射 (push forward)$f_*: T_pM \to T_{f(p)}N$. 若 $\forall g \in \mathcal{F}[N], g \circ f \in \mathcal{F}[M], \forall V \in T_p(M), V[g \circ f] \in \mathbb{R}$, $(f_*V)[g] \equiv V[g \circ f]$(即取坐标卡 $(U, \varphi), (V, \psi)$), 则 $(f_*V)[g \circ \psi^{-1}(y)] = V[g \circ f \circ \varphi^{-1}(x)]$(即设 $\begin{cases} x = \varphi(p) \\ y = \psi(f(p)) \end{cases}$). 其中 $V \equiv V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $f_*V \equiv W^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \Rightarrow W^\alpha = V^\mu \frac{\partial y^\alpha(x)}{\partial x^\mu} (g = y^\alpha)$;

    (a) 微分映射对高阶逆变张量的作用: 对于 $f_*: \mathcal{T}_p(M)^q_0 \to \mathcal{T}_{f(p)}(N)^q_0$, $T = T^{\mu_1 \cdots \mu_q} \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} \in \mathcal{T}_p(M)^q_0$, 则 $f_*T = (f_*T)^{\alpha_1 \cdots \alpha_q} \frac{\partial}{\partial y^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial y^{\alpha_q}} \in \mathcal{T}_{f(p)}(N)^q_0$, $(f_*T)^{\alpha_1 \cdots \alpha_q} = T^{\mu_1 \cdots \mu_q} \frac{\partial y^{\alpha_1}(x)}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_q}(x)}{\partial x^{\mu_q}} \in \mathcal{T}_{f(p)}(N)^q_0$;

    (b) 微分映射的链式法则 (流形上): 若 $f: M \to N, g: N \to P$ 是流形 M, N, P 之间的光滑映射, 则复合 $g \circ f: M \to P$ 的微分映射具有链式, 则 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$;

        i. 若用 $x^\mu, y^\alpha, z^\lambda$ 分别表示 $p \in M, f(p) \in N, g(f(p)) \in P$ 的坐标, 则 $((g \circ f)_*V)^\lambda = \frac{\partial z^\lambda(y(x))}{\partial x^\mu} V^\mu = \frac{\partial z^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} V^\mu = \frac{\partial z^\lambda}{\partial y^\alpha} (f_*V)^\alpha$;

13. 光滑映射诱导的拉回映射: 映射 $f: M \to N$ 自然诱导出另一个 (方向相反的) 拉回映射 (pull back)$f^*: T^*_{f(p)}N \to T^*_pM$, $< f^*\omega, V > \equiv < \omega, f_*V >$;

    (a) 拉回映射对高阶协变张量的作用: 对于 $f^*: \mathcal{T}_{f(p)}(N)^0_r \to \mathcal{T}_p(M)^0_r$, 其分量形式 $(f^*T)_{\mu_1 \dots \mu_r} = T_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial y^{\alpha_r}}{\partial x^{\mu_r}}$;

    (b) 拉回映射的分量形式: $(f^*\omega)_\mu V^\mu = \omega_\alpha (f_*V)^\alpha = \omega_\alpha \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} V^\mu$, 即 $(f^*\omega)_\mu = \omega_\alpha \frac{\partial y^\alpha(x)}{\partial x^\mu}$;

    (c) 映射法则: $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$;

14. 微分映射和拉回映射推广到 $(q, r)-$ 型张量: 一般而言, f_* 和 f^* 不能推广到混合的 $(q, r)-$ 型张量. 但是当 $N = M$, $f \in Diff(M)$ 时, 因为 f^{-1} 存在且可微, Jacobian 矩阵可逆, f_* 和 f^* 描述张量在主动坐标变换下的协变性;

15. 子流形: 设 $f: M \to N$ 光滑, $\dim M \leq \dim N$;

    (a) 浸入: 称 f 为 M 在 N 中的浸入, 当 $f_*: T_pM \to T_{f(p)}N$ 是单射, 即 Jacobian 矩阵是满秩的 ($rank f_* = \dim M$);

(b) 嵌入: 若 f 本身也是单射, 则称 M 为 N 的嵌入, 此时 $f(M)$ 为 N 的子流形;

16. 积分曲线: 任取 M 上的向量场 $X \in \chi(M)$, 该向量场积分曲线 $x(t)$ 定义为 $x = x(t)$ 处的切向量恰为 $X|_x$, 在坐标卡 (U, φ) 中用分量表示为 $\frac{dx^\mu(t)}{dt} = X^\mu(x(t))$;

    (a) 集分曲线的初始位置记为 $x_0^\mu = x^\mu(0)$;

    (b) 过给定点的积分曲线存在且唯一: 以 $\sigma(t, x_0)$ 表示 $t = 0$ 时初始位置为 x_0 的积分曲线, 则 $\begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma^\mu(t, x_0) = X^\mu(\sigma(t, x_0)) \\ \sigma^\mu(0, x_0) = x_0^\mu \end{cases}$, 由一阶常微分方程组解的性质, 可知过给定点的积分曲线是存在且唯一的;

        i. 积分曲线满足 $\sigma(t, \sigma^\mu(s, x_0)) = \sigma(s + t, x_0^\mu)$;

    (c) 流: 映射 $\sigma : \mathbb{R} \times M \to M$ 定义了向量场 $X \in \chi(M)$ 的流;

    (d) 微分同胚 (由积分曲线定义): 固定 $t \in \mathbb{R}$ 时, $\sigma_t(x) \equiv \sigma(t, x)$ 定义了微分同胚 $\sigma_t : M \to N$, 即 $\begin{cases} \sigma_t(\sigma_s(x)) = \sigma_{t+s}(x) \quad \Rightarrow \sigma_t \circ \sigma_s = \sigma_{t+s} \\ \sigma_0 = Id \\ \sigma_{-t} = (\sigma_t)^{-1} \end{cases}$;

17. 单参数子群: $\{\sigma_t | t \in \mathbb{R}\}$ 构成 $\mathrm{Diff}(M)$ 的交换子群, 称为单参数子群;

18. 无穷小变换: $\sigma_\varepsilon^\mu(x) \approx x^\mu + \varepsilon \frac{d\sigma_t^\mu(x)}{dt}|_{t=0} = x^\mu + \varepsilon X^\mu(x)$;

    (a) 无穷小生成元: 向量场 $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 构成变换 σ_t 的无穷小生成元;

19. 向量场的流: 给定向量场 X, 与之对应的流 σ 可通过指数映射得到, $\sigma^\mu(t, x) = x^\mu + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\frac{d}{ds}\right)^n \sigma^\mu(s, x)\Big|_{s=0} = x^\mu + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} X^n x^\mu\Big|_{s=0} = \exp(tX) x^\mu$;

    (a) 流的性质: $\begin{cases} \sigma^\mu(0, x) = \exp(0 \cdot X) x^\mu = x^\mu \\ \frac{d\sigma^\mu(t,x)}{dt} = X \exp(tX) x^\mu = \frac{d}{dt}[\exp(tX) x^\mu] \\ \sigma(s, \sigma(t, x)) = \sigma(s, \exp(tX) x) = \exp(sX) \exp(tX) x = \exp((s+t)X) x = \sigma(s+t, x) \end{cases}$

    (b) 向量场生成的流: 设 $\sigma(t, x), \tau(t, x)$ 是由向量场 X, Y 生成的流, 则 $\frac{d\sigma^\mu(s,x)}{ds} = X^\mu(\sigma(s, x))$, $\frac{d\tau^\mu(t,x)}{dt} = Y^\mu(\tau(t, x))$;

20. Lie 导数: 设 $Y|_x \in T_xM$ 可以沿 $\sigma(s,x)$ 到临近点 $x' = \sigma_\varepsilon(x), Y|_{\sigma_\varepsilon(x)} \in T_{\sigma_\varepsilon(x)}M$, 则 Lie 导数描述 Y 的变化为 $\mathcal{L}_X Y = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[(\sigma_{-\varepsilon})_* Y|_{\sigma_\varepsilon(x)} - Y|_x\right]$;
    (a) Lie 导数的坐标表示: 在坐标卡 (U,φ) 中考虑分量 $\sigma^\mu_\varepsilon(x) = x^\mu + \varepsilon X^\mu(x)$, 经过无穷小变换后, 用 $(\sigma_{-\varepsilon})_*$ 映回 x 处, 代入 Lie 导数得到 $\mathcal{L}_X Y = [X^\mu(x)\partial_\mu Y^\nu(x) - Y^\mu(x)\partial_\mu X^\nu(x)]e_\nu|_x$;
    (b) Lie 括号: 向量场 $X = X^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}, Y = Y^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 的 Lie 括号定义为 $[X,Y] \equiv XY - YX = [X^\mu(x)\partial_\mu Y^\nu(x) - Y^\mu(x)\partial_\mu X^\nu(x)]e_\nu|_x$;
        i. 尽管 XY, YX 是二阶微分算子, 但其差仍然为一阶算子, 因而仍是向量场;
        ii. 向量场在 Lie 括号运算下封闭:
            A. 双线性: $\begin{cases}[X, c_1Y_1 + c_2Y_2] = c_1[X,Y_1] + c_2[X,Y_2] \\ [c_1X_1 + c_2X_2, Y] = c_1[X_1,Y] + c_2[X_2,Y]\end{cases}$;
            B. 斜对称性: $[X,Y] = -[Y,X]$;
            C. Jacobi 恒等式: $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$;
    (c) 链式法则: 设 $X, Y \in \chi(M), f: M \to N$, 则 $f_*[X,Y] = [f_*X, f_*Y]$;
        i. Lie 导数描述了两个流的非对易性质: $\tau^\mu(\delta,\sigma(\varepsilon,x)) - \sigma^\mu(\varepsilon,\tau(\delta,x)) = \varepsilon\delta[X,Y]^\mu$;
    (d) 对易: $\mathcal{L}_X Y = [X,Y] = 0 \Leftrightarrow \sigma(s,\tau(t,x)) = \tau(t,\sigma(s,x))$;
    (e) 微分 1− 形式 $\omega \in \Omega^{-1}(M)$ 的 Lie 导数 $\mathcal{L}_X\omega \equiv \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[(\sigma_\varepsilon)^*\omega|_{\sigma_\varepsilon(x)} - \omega|_x\right]$, 令 $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ 则可展开为 $\mathcal{L}_X\omega = (X^\nu\partial_\nu\omega_\mu + \partial_\mu X^\nu\omega_\nu)dx^\mu$;
    (f) 对标量函数 $f \in \mathcal{F}(M)$ 的 Lie 导数 $\mathcal{L}_X f \equiv \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}[f(\sigma_\varepsilon(x)) - f(x)] = X^\mu(x)\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = X[f]$;
    (g) 对一般张量场的 Lie 导数 $\mathcal{L}_X(Y\otimes\omega) = Y\otimes(\mathcal{L}_X\omega) + (\mathcal{L}_X Y)\otimes\omega$;
21. 爱尔兰根纲领: 利用群理论和仿射几何对几何学进行形式化;
22. 微分形式: 设 $\omega \in T_p(M)^0_r$ 是 $r-$ 阶协变张量, P 是 r 个元素的重排 $P\omega(V_1,...,V_r) = \omega(V_{P(1)},...,V_{P(r)})$, 即对 $\omega(e_{\mu_1},...,e_{\mu_1}) = \omega_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_r}$ 有 $P\omega(e_{\mu_1},...,e_{\mu_1}) = \omega_{\mu_{P(1)}\cdots\mu_{P(r)}}$. 在 M 空间中 $r-$ 阶协变张量 ω 在 p 点的微分形式全体记为 $\Omega^r_p(M)$;
    (a) 对称化: $S\omega = \frac{1}{r!}\sum\limits_{P\in S_r} P\omega$, 反对称化: $A\omega = \frac{1}{r!}\sum\limits_{P\in S_r}\mathrm{sgn}(P)P\omega$;

23. 楔积: 对于 2− 形式的切矢量基有 $dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu$, 推广到 $r-$ 形式 $dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r} = \sum\limits_{P \in S_r} \mathrm{sgn}(P) dx^{\mu_{P(1)}} \otimes ... \otimes dx^{\mu_{P(r)}}$;
    (a) 张量场分量的楔积表示: $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\mu_2...\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}$;
    (b) 楔积的性质:
        i. 若指标值有相重复, 则楔积为 0;
        ii. 楔积的指标经过重排, 则出现排列的符号因子 $\mathrm{sgn}(P)$;
        iii. 楔积对每个因子都是线性的;
    (c) 微分形式的维数: 对 $\omega \in \Omega_p^r(M)$ 的独立分量的个数为 $C_m^r = \frac{m!}{r!(m-r)!}$, 所以 $\dim \Omega_p^r(M) = \frac{m!}{r!(m-r)!} = \dim \Omega_p^{m-r}(M)$;
24. 外积: 由楔积定义映射 $\wedge : (\omega, \xi) \in \Omega_p^q(M) \times \Omega_p^r(M) \to \omega \wedge \xi \in \Omega_p^{q+r}(M)$, 其运算定义为 $(\omega\wedge\xi)(V_1, ..., V_{q+r}) = \frac{1}{q!r!} \sum\limits_{P \in S_{q+r}} \mathrm{sgn}(P) \times \omega(V_{P(1)}, ..., V_{P(q)}) \cdot \xi(V_{P(q+1)}, ..., V_{P(q+r)})$;
    (a) 分量形式: 对于张量场 $\begin{cases} \omega = \frac{1}{q!}\omega_{\mu_1...\mu_q} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_q} \\ \xi = \frac{1}{r!}\xi_{\mu_{q+1}...\mu_{q+r}} dx^{\mu_{q+1}} \wedge ... \wedge dx^{\mu_{q+r}} \end{cases}$, 外积运算可表示为分量形式 $(\omega\wedge\xi)_{\mu_1...\mu_{q+r}} = \frac{(q+r)!}{q!r!}\omega_{\mu_1...\mu_q}\xi_{\mu_{q+1}...\mu_{q+r}}$;
    (b) 结合律: $\forall \xi, \eta, \omega \in \Omega_p^*(M)$, 有 $(\xi \wedge \eta) \wedge \omega = \xi \wedge (\eta \wedge \omega)$;
    (c) $qr-$ 律: $\forall \xi \in \Omega_p^q(M), \eta \in \Omega_p^r(M)$, 有 $\xi \wedge \eta = (-1)^{qr} \eta \wedge \xi$;
        i. 奇形式 ξ, η 的外积反对易, $(-1)^{qr} = -1 \Rightarrow \xi \wedge \eta = 0$;
        ii. 偶形式 ξ 与任何形式的 η 的外积对易, $\xi \wedge \eta = \eta \wedge \xi$;
25. 外代数: 微分形式全体在向量空间的运算和外积运算下形成外代数 $\Omega_p^*(M) = \otimes_{r=0}^m \Omega_p^r(M)$;
26. 外导数 (外微分): 作用在 $r-$ 形式上外导数 $d_r : \Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)$ 定义为 $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1...\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r} \in \Omega^r(M) \Rightarrow d\omega = d_r\omega = \frac{1}{r!}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\omega_{\mu_1...\mu_r}\right) dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}$;
    (a) 莱布尼兹法则: 设 $\xi \in \Omega^q(M), \eta \in \Omega^r(M)$, $d(\xi \wedge \eta) = d\xi \wedge \eta + (-1)^q \xi \wedge d\eta$;
        i. 幂零性: $d^2 = 0$, 即 $d_{r+1}d_r = 0$;
        ii. 设 f^* 是协变张量的 pull-back:

A. $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$;

B. $f^*(\xi \wedge \eta) = (f^*\xi) \wedge (f^*\eta)$;

(b) 其他性质: 对于 $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, Y = Y^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \in \mathcal{X}(M), \omega = \omega_\mu dx^\mu \in \Omega^1(M)$, 有 $d\omega(X,Y) = X[\omega(Y)] - Y[\omega(X)] - \omega([X,Y])$;

i. 对于 $r-$ 形式: $d\omega(X_1, ..., X_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r}(-1)^{i+1}X_i\omega(X_1, ..., \hat{X}_i, ..., X_{r+1}) + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j$

27. 内积: 设 $X \in \mathcal{X}(M)$, 定义内积 $i_X : \Omega^r(M) \to \Omega^{r-1}(M)$, 运算 $i_X\omega(X_1, ..., X_{r-1}) = \omega(X, X_1, ..., X_{r-1})$;

(a) 分量形式: $i_X\omega = \frac{1}{(r-1)!}X^\nu\omega_{\nu\mu_2...\mu_r}dx^{\mu_2}\wedge...\wedge dx^{\mu_r} = \frac{1}{r!}\sum_{s=1}^{r} X^{\mu_s}\omega_{\mu_1...\mu_s...\mu_r}(-1)^{s-1}dx^{\mu_1}\wedge ... \wedge \widehat{dx^{\mu_s}} \wedge ... \wedge dx^{\mu_r}$, $\widehat{dx^{\mu_s}}$ 表示抽除该项;

(b) 微分形式的 Lie 导数: $L_X\omega = (di_X + i_Xd)\omega = (\omega_\mu\partial_\nu X^\mu + X^\mu\partial_\mu\omega_\nu)dx^\nu$;

i. $r-$ 形式: $L_X\omega = X^\nu\frac{1}{r!}\partial_\nu\omega_{\mu_1...\mu_r}dx^{\mu_1}\wedge...\wedge dx^{\mu_r} + \sum_{s=1}^{r}\partial_{\mu_s}X^\nu\frac{1}{r!}\omega_{\mu_1...\nu...\mu_r}dx^{\mu_1}\wedge ... \wedge dx^{\mu_r}$;

ii. 普遍形式: $L_X = di_X + i_Xd$;

28. 复形: 一系列空间之间的一系列线性映射;

(a) 映射的象: 设映射 $t : V_1 \to V_2$, 则记映射 t 的象为 $Im(t) \subseteq V_2$;

(b) 映射的核 (原象): 设映射 $t : V_1 \to V_2$, 则记映射 t 的原象为 $Ker(t) \subseteq V_1$;

(c) de Rham 复型: 对一系列空间 $\Omega^n(M)$ 之间有一系列映射 d_n, 若 $Imd_r \subseteq Kerd_{r+1}$, 则称这个复型为 de Rham 复型;

i. 恰当形式的拓扑空间可以推出闭形式;

29. 近辛流形 (AS 流形): 如果 $2n$ 维光滑流形 M 上存在一个 $2-$ 形式 ω 满足非退化条件 $\omega^n := \omega \wedge ... \wedge \omega \neq 0$, 则称其为近辛流形;

(a) 非退化条件的其他形式: 将 $2-$ 形式的 ω 展开为分量形式 $\omega = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$, 则非退化性等价于 $\det[\omega_{\mu\nu}]_{2n\times 2n} \neq 0$;

(b) 若定义 $\mathrm{Pf}[\omega_{\mu\nu}] := \frac{1}{2^n n!}\omega_{\mu_1\nu_1}...\omega_{\mu_n\nu_n}\epsilon^{\mu_1\nu_1...\mu_n\nu_n}$, 则 $\det[\omega] = \mathrm{Pf}[\omega]^2$;

30. 辛流形: 如果 AS 流形 (M, ω) 上的辛形式是闭的 $d\omega = 0$, 则称其为辛流形;

(a) 辛同胚: 辛流形 (M, ω) 和 (M', ω') 之间的微分同胚映射 $f: M \to M'$ 能够保持辛结构 $\omega = f^*\omega'$, 则称该微分同胚映射为辛同胚;

(b) 自映射保持辛结构的条件: 当辛流形 (M, ω) 上的自映射 $\sigma_t: M \to M$ 满足 $\sigma_t^*\omega = \omega \Rightarrow L_X\omega = 0$ 时, 则自映射能够保持辛结构;

31. 可定向性: 设 M 连通, $p \in U_i \cap U_j \subset M$ 有两套局部坐标系 x^μ, y^α; 切空间 T_pM 由 $e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ 或 $\tilde{e_\alpha} = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ 张成 $\tilde{e_\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} e_\mu$. $J = \det[\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}]$ 的符号确定相对定向性, $\mathrm{sgn}J = 1$ 时, $e_\mu, \tilde{e_\alpha}$ 保持定向;

    (a) 可定向流形: 若 M 中任意两个有交集的坐标卡 $U_i \cap U_j \neq \phi$, 存在 U_i 的局部坐标 $\{x^\mu\}$ 和 U_j 的局部坐标 $\{y^\alpha\}$, 使得 $J|_{U_i \cap U_j}$ 处处为正, 则称 M 是可定向流形;

    (b) 可定向流形 M 允许有处处非零的体积形式: 设 $h(p) > 0, \omega = h(p)dx^1 \wedge ... \wedge dx^m \in \Omega^m(M) \cong \Omega^0(M) = \mathcal{F}(M)$;

        i. 坐标变换: 点 $p \in U_i \cup U_j$ 的坐标变换定义为 $\omega = h(p)\frac{\partial x^1}{\partial y^{\mu_1}} dy^{\mu_1} \wedge ... \wedge \frac{\partial x^m}{\partial y^{\mu_m}} dy^{\mu_m} = h(p) \det\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\right) dy^1 \wedge ... \wedge dy^m$;

        ii. 不可定向流形上不存在体积形式;

32. 积分的引入: 当流形 M 是可定向的时, 才能对其上的微分形式进行积分;

    (a) (TODO)$m-$ 元积分: 函数 $f: M \to \mathbb{R}$ 在流形上积分可以通过体积元 ω 定义. 在坐标卡 U_i 上构建积分, 将其定义为普通维欧氏空间中开集 $\varphi_i(U_i)$ 上的 $m-$ 元积分 $\int_{U_i} f\omega = \int_{\varphi(U_i)} f(\varphi_i^{-1}(x))h(\varphi_i^{-1}(x))dx^1...dx^m$;

        i. 存在的问题:

            A. 开覆盖 $\{U_i | i \in I\}$ 的指标集 I 未必可数, 更不一定是有限集;

            B. 即使存在有限的开覆盖 (如紧致流形), 仍有在 $U_i \cap U_j \neq \phi$ 上计重积分的问题;

            C. 依赖开覆盖的选择, 不仅仅反映 (M, ω, f) 的信息;

    (b) 单位拆分: 给定 M 的一个开覆盖 $\{U_i | i \in I\}$, 从属于该开覆盖的单位拆分是一族光滑函数 $\{\varepsilon_i: M \to \mathbb{R} | i \in I\}$, 满足下列条件:

        i. $\forall p \in M, 0 \leq \varepsilon_i(p) \leq 1$;

        ii. $\mathrm{supp}\varepsilon_i \subset U_i$, 即 $p \notin U_i \Rightarrow \varepsilon_i(p) = 0$;

iii. $\forall p\in M,\exists$ 邻域 $O_p\subset M$ 使 $\varepsilon_i|_{O_p}\neq 0$ 的函数 ε_i 仅有有限多个;

iv. $\forall p\in M$, 有单位拆分 $\sum\limits_{i\in I,\varepsilon_i(p)\neq 0}\varepsilon_i(p)=1$(有限和);

A. $f(p)=\sum\limits_i f(p)\varepsilon_i(p)=\sum\limits_i f_i(p)$;

B. $\int_M f\omega=\sum\limits_i\int_{U_i}f_i\omega$;

(c) 单位拆分的特点:

i. 不同的开覆盖有不同的单位拆分, 积分值相同;

ii. 和式中的非零部分构成有限和;

iii. 在 $\cap U_j\neq\phi$ 上, 如果 $f_i(p)\neq 0$, 则 $\sum f_j(p)=f(p)$, 积分计重的个部分被权重因子 $\varepsilon_j(p)$ 压缩, 总和相当于只计一次;

(d) 仿紧流形:

i. 细分: 开覆盖 $\{U_i|i\in I\}$ 的一个细分 $\{V_j|j\in J\}$ 指每个 V_j 都是某个 U_i 的子集;

ii. 局部有限: 开覆盖 $\{U_i|i\in I\}$ 是局部有限的, 如果 $\forall p\in M,\exists$ 邻域 O_p 使 $\{i\in I|U_i\cap O_p\}$ 为有限;

iii. 仿紧流形意指 M 上的每个开覆盖都有一个局部有限的细分;

iv. 紧致流形是仿紧流形的特殊形式;

(e) 单位拆分的条件: Hausdorff 空间 M 允许单位拆分, 当且仅当 M 是仿紧的;

33. Hodge 星运算: 若 $M=\mathbb{R}^m$, 定义线性运算 $*$: $\Omega_q(M)\to\Omega^{m-q}(M)$;

(a) $^*(dx^{\mu_1}\wedge...\wedge dx^{\mu_q})=\frac{1}{(m-q)!}\epsilon_{\mu_1...\mu_q\mu_{q+1}...\mu_m}dx^{\mu_{q+1}}\wedge...\wedge dx^{\mu_m}$;

i. 分量形式: 对于 $\omega_q=\frac{1}{q!}\omega_{\mu_1...\mu_q}dx^{\mu_1}\wedge...\wedge dx^{\mu_q}\in\Omega^q(M)$, 有 $^*\omega_q=\frac{1}{q!}\omega_{\mu_1...\mu_q}{}^*(dx^{\mu_1}\wedge...\wedge dx^{\mu_q})=\frac{1}{q!(m-q)!}\omega_{\mu_1...\mu_q}\epsilon^{\mu_1...\mu_q}_{\mu_{q+1}...\mu_m}dx^{\mu_{q+1}}\wedge...\wedge dx^{\mu_m}$;

(b) Levi-Civita 张量: $\epsilon_{\mu_1...\mu_m}=\begin{cases}+1 & \mu_1,...,\mu_m\text{是}1,...,m\text{的偶排列}\\ -1 & \mu_1,...,\mu_m\text{是}1,...,m\text{的奇排列}\\ 0 & \text{其他不成排列的形式}\end{cases}$;

i. 对于 $\delta^{\nu_1...\nu_s}_{\mu_1...\mu_s}=\det\begin{pmatrix}\delta^{\nu_1}_{\mu_1} & ... & \delta^{\nu_s}_{\mu_1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \delta^{\nu_1}_{\mu_s} & ... & \delta^{\nu_s}_{\mu_s}\end{pmatrix}$, Levi-Civita 张量满足 $\epsilon_{\mu_1...\mu_m}=\delta^{1...m}_{\mu_1...\mu_m}$;

ii. 推论: $^{**}\omega_q = (-1)^{q(m-q)}\omega_q$;

34. 顶形式与体积元的关系: $dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_m} = \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_m} dx^1 \wedge ... \wedge dx^m$;

35. 向量空间的内积: 可在向量空间 $\Omega^q(M)$ 中引入内积. 对于 $\begin{cases} \alpha_q = \frac{1}{q!} a_{\mu_1 ... \mu_q} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_q} \\ \beta_q = \frac{1}{q!} b_{\mu_1 ... \mu_q} dx^{\mu_1} \wedge ... \wedge dx^{\mu_q} \end{cases}$, 有内积 $(\alpha_q, \beta_q) = \int_M \alpha_q \wedge^* \beta_q = \frac{1}{q!} \int_M a_{\mu_1 ... \mu_q}(x) b_{\mu_1 ... \mu_q}(x) dx^1 \wedge ... \wedge dx^m$;

   (a) 外导数 d 的伴随算子: $\delta : \Omega^q(M) \to \Omega^{q-1}(M)$, $(\alpha_q, d\beta_{q-1}) = (\delta\alpha_q, \beta_{q-1}) \Rightarrow \delta = (-1)^{mq+m+1*} d^*$;

      i. 幂零性: $\delta^2 = 0$;

   (b) Laplace 算子: $\Delta : \Omega^q \to \Omega^q$, $\Delta = (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d$, $\Delta\omega_q = d_{q-1}\delta_q\omega_q + \delta_{q+1} d_q \omega_q$;

      i. 正定性: $(\omega_q, \Delta\omega_q) = (d\omega_q, d\omega) + (\delta\omega_q, \delta\omega_q) \geq 0$;

      ii. 调和形式: $\Delta\omega_q = 0$ 的形式;

36. Hodge 定理: 设 M 为紧致无边界流形, 其上任一 $q-$ 形式的 ω_q 可分解为 $\omega_q = d\alpha_{q-1} + \delta\beta_{q+1} + \gamma_q, \Delta\gamma_q = 0$;

37. Stokes 定理: $\int_M d\omega_{m-1} = \int_{\partial M} \omega_{m-1}$;

4 同调群和 de Rham 定理

1. 几何独立: 在 $\mathbb{R}^m$ 中 $r+1$ 个几何独立的点不同时在任何 $(r-1)-$ 维超平面上;

2. 单纯形: 设 $0 \leq r \leq m, p_0, ..., p_r$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中 $r+1$ 个几何独立的点, $r-$ 单纯形由有界闭集 $\sigma^r =< p_0 p_1 ... p_r >= \{x \in \mathbb{R}^m | x = \sum\limits_{i=0}^{r} c_i p_i, c_i \geq 0, \sum\limits_{i=0}^{r} c_r = 1\}$;

   (a) 真面: 设 $0 \leq q \leq r$, 在 σ^r 的 $r+1$ 个顶点中任意选择 $q+1$ 个点 $p_{i_0}, ..., p_{i_q}$ 构造的 $q-$ 单形 $\sigma^q =< p_{i_0} ... p_{i_q} >$ 称为 σ^r 的一个 $q-$ 面, 以 $\sigma^q \leq \sigma^r$ 记. 若 $\sigma^q \neq \sigma^r$, 则 σ^q 为 σ^r 的真面, 记为 $\sigma^q < \sigma^r$;

   (b) 单纯复合形: 设 K 是 $\mathbb{R}^m$ 中有限个单形的集合, 称 K 为单纯复形, 当且仅当下列条件满足:

i. $\forall\sigma\in K,\sigma'\leq\sigma\Rightarrow\sigma'\in K$;

ii. $\forall\sigma,\sigma'\in K,\sigma\cap\sigma'$ 或为空集, 或构成 σ,σ' 的公共面, 即同时有 $\sigma\cap\sigma'\leq\sigma,\sigma\cap\sigma'\leq\sigma'$;

(c) 复形的维度: 复形 K 的维数 $\dim K$ 定义为其中最高维单形的维数;

3. 多面体: 设 K 是 $\mathbb{R}^m$ 中的一个复形, 其全体单形的全体点所形成的空间 $|K|\subset\mathbb{R}^m$ 被称为多面体;

4. 单纯剖分: 复形 K 被称为 K 上多面体的一个单纯剖分或三角剖分;

   (a) 多面体允许有不同的单纯剖分: $K\neq K',|K|=|K'|$;

   (b) 可三角剖分: 设 X 为拓扑空间, 如果存在一个复形 K 以及同胚映射 $f:|K|\to X$, 则称 X 可三角剖分, 并称 (f,K) 为 X 的一个三角剖分;

5. 单向的单形: $r\geq1$ 维的单形可以引入两种不同的定向. 设 π 是 $(0,1,...,r)$ 的一个排列, 定向单形 $\sigma^r=(p_0...p_r)$ 有 $(p_{\pi(0)}...p_{\pi(r)})=\mathrm{sgn}\pi(p_0...p_r)=\pm\sigma^r$;

   (a) $r-$ 维链: 如复形 K 中有 I_r 个 $r-$ 维定向单形 $\sigma_i^r,1\leq i\leq I_r$, 该复形的一条 $r-$ 维链是指形式和 $c=\sum\limits_{i=1}^{I_r}n_i\sigma_i^r,n_i\in\mathbb{Z}$;

6. 链群: 复形 K 中的 $r-$ 维链之间可做加法运算 $c=\sum\limits_{i=1}^{I_r}n_i\sigma_i^r,c'=\sum\limits_{i=1}^{I_r}n_i'\sigma_i^r\Rightarrow c+c'=\sum\limits_{i=1}^{I_r}(n_i+n_i')\sigma_i^r$. 在该运算下, K 中所有 $r-$ 维链形成一个交换群 $C_r(K)$, 称之为链群, $(n_1,...,n_{I_r})$ 称为链 $c=\sum_i n_i\sigma_i^r$ 的系数;

   (a) 单位元: $0=\sum\limits_{i=1}^{I_r}0\cdot\sigma_i^r$;

   (b) 逆元: $-c=\sum\limits_{i=1}^{I_r}(-n_i)\cdot\sigma_i^r$;

   (c) $C_r(K)\cong\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}\otimes...\otimes\mathbb{Z}$;

7. 边缘算子: 边缘算子 ∂_r 作用在 $r-$ 维单形 σ^r 上给出 $(r-1)-$ 维链 $\partial_r(p_0...p_r)=\sum\limits_{i=1}^{r}(-1)^i(p_0...\hat{p}_i...p_r)$;

   (a) 将 ∂ 线性地扩充到 $r-$ 维链的作用, 该算子显然是群同态 $\partial_r:C_r(K)\to C_{r-1}(K),\partial_r\left(\sum\limits_{i=1}^{I_r}n_i\sigma_i^r\right)=\sum\limits_{i=1}^{I_r}n_i\partial_r\sigma_i^r$;

8. 闭链: $c \in C_r(K)$ 称为 $r-$ 维闭链, 当且仅当 $\partial_r c = 0$;
   (a) 边缘链: c 称为 $r-$ 维边缘链, 当且仅当 $\exists c' \in C_{r+1}(K), c = \partial_{r+1} c'$;
      i. $r-$ 维边缘链之集 $B_r(K)$ 构成 $C_r(K)$ 的子群 $0 = \partial(0)$;
   (b) 边缘算子的幂零性: $\partial_r \circ \partial_{r+1} : C_{r+1}(K) \to C_{r-1}(K)$ 是零映射, 即 $\partial_r(\partial_{r+1} c) = 0, \forall c \in C_{r+1}(K)$, 简记为 $\partial^2 = 0$;
9. 同调群:
   (a) 同调群: 设 K 是 $n-$ 维复形, $r-$ 阶同调群 $H_r(K), 0 \le r \le n$ 定义为 K 的 $r-$ 维闭链群 $Z_r(K)$ 模掉边缘链子群 $B_r(K)$, 即 $H_r(K) = Z_r(K)/B_r(K)$;
      i. 闭链的同调关系是等价关系, 闭链 $c \in Z_r(K)$ 的同调等价类记作 $[c] \in H_r(K)$;
      ii. 设 $(K, f), (L, g)$ 分别是拓扑空间 X 和 Y 的三角剖分, 则当 $X \cong Y$ 同胚时有 $H_r(K) = H_r(L), r = 0, 1, ...$;
         A. 同调群是拓扑不变量;
      iii. 若 K 是连通的复形, 则 $H_0(K) = \mathbb{Z}$;
   (b) 流形的 Betti 数: $b_r = \dim H_r(M, \mathbb{Z})$, 及构成复形的自由生成群的个数;
      i. Euler 示性数: $\chi(M) = \sum\limits_{r=0}^{\dim M} (-1)^r b_r$, Euler 示性数是一个拓扑不变量;
   (c) 有限生成: 如果交换群 G 存在 $I < \infty$ 个生成元 $a_j, 1 \le j \le I$, 使得任何群元 g 都能够表示成 $g = \sum\limits_{j=1}^{I} n_j a_j (\forall g \in G, n_j \in \mathbb{Z})$, 则称 G 是有限生成的;
      i. 自由交换群: 如果有限生成交换群 G 的生成元是线性无关的, 即 $n_1 a_1 + ... + n_I a_I = 0$ 蕴含 $n_1 = ... = n_I = 0$, 则称 G 由基元 $a_i, ..., a_I$ 自由生成;
         A. 自由交换群 G 的任一子群 H 仍是一个自由交换群;
   (d) 同调群的一般性质:
      i. 如果 K 有 N 个连通分支 $K_1, ..., K_N$, 则 $H_0(K_j) = \mathbb{Z}, 1 \le j \le N$, $H_0(K) = H_0(K_1) \oplus ... \oplus H_0(K_N) = \mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}$;

   ii. K 的 $r-$ 阶同调群由其各个连通分支 $K_j(1 \leq j \leq N)$ 的 $r-$ 阶同调群确定: $H_r(K) = H_r(K_1) \oplus ... \oplus H_r(K_N)$;

(e) 幺模矩阵: 幺模矩阵 E_{ij} 满足 $(E_{ij})_{kl} = \begin{cases} \delta_{kl} + \delta_{ik}\delta j_{jl} & i \neq j \\ \delta_{kl} - 2\delta_{ik}\delta_{jl} & i = j \end{cases}$, 各元皆为整数, 并且 $\dim E_{ij} = \pm 1$;

(f) 等价关系: 设 C, D 是 $n \times m$ 的整系数矩阵, 如果存在 $n-$ 阶的幺模方阵 $\mathfrak{N}$ 和 $m-$ 阶幺模方阵 $\mathfrak{M}$ 使得 $D = \mathfrak{N}C\mathfrak{M}$, 就称 D 与 C 等价, 记作 $D \sim C$;

(g) 整系数矩阵 C 的初等变换: 都是等价变换;

   i. $C' = E_{ij}C, C$ 的第 i 行加上第 j 行;

   ii. $C' = CE_{ji}, C$ 的第 i 列加上第 j 列;

   iii. $C' = E_{ii}C, C$ 的第 i 行变成相反数;

   iv. $C' = CE_{ii}, C$ 的第 i 列变成相反数;

   v. 行或列的交换操作;

(h) 标准型: 若 $n \times m$ 整系数矩阵 C 的秩为 $r(r \leq \min(m, n))$, 则存在 n 阶幺模方阵 $\mathfrak{N}$ 和 m 阶幺模方阵 $\mathfrak{M}$ 使得 $D = \mathfrak{N}C\mathfrak{M}$, 则称 D 为 C 的标准型, r 为不变因子;

   i. 推论: 如果 m 维自由交换群 G_m 以 $a_1, ..., a_m$ 为一组基, F 是 G_m 的一个子群, 则存在 G_m 的一组基 $a'_1, ..., a'_m$ 及 r 个正数 $d_1, ..., d_r(r \leq m)$, 其中 d_i 可除尽 d_{i+1}, 使得 F 是以 $d_1a'_1, ..., d_ra'_r$ 为一组基的自由交换群 $(d_1\mathbb{Z}) \oplus ... \oplus (d_r\mathbb{Z})$;

   ii. 若 G 是有限维自由交换群, F 是其任一子群, 那么 $G/F \cong \mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}(m - r$ 个自由生成群$) \oplus \mathbb{Z}_{d_1} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{d_r}(r$ 个循环群$)$, 其中 $\mathbb{Z}_d$ 表示整数 d 生成的循环群;

      A. 同调群的一般结构: $H_r(K, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{d_1} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{d_r}$;

      B. 挠子群: 同调群的非自由部分被称为挠子群;

   iii. 定理: 在 $n-$ 维复形 K 总设有 I_r 个 $r-$ 维单形, 则 $\chi(K) = \sum\limits_{r=0}^{n}(-1)^r I_r = \sum\limits_{r=0}^{n}(-1)^r b_r$ 称为复形 K 的 Euler 示性数, 是个拓扑不变量;

(i) 上链: 复形 K 的整系数 $r-$ 维链群 $C_r(K)$ 相应的 $r-$ 维上链群定义为 $C^r(K) = Hom(C_r(K), \mathbb{Z})$;

i. 上闭链: $\delta c^r = 0$;

ii. 上同调群: 复形 K 的 r-维上同调群由商群 $H_r(K, \mathbb{Z}) = Z^r(K, \mathbb{Z})/B^r(K, \mathbb{Z}), 0 \leq r \leq \dim K$ 给出;

A. 上同调群的一般结构: $H_r(K, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z} \oplus T^r(K)$, 其中 $T^r(K) = T_{r-1}(K)$(即由下同调的低维循环群构成);

10. de Rham 理论:

(a) 流形中的单形: 流形 M 中的 $r-$ 维单形可用光滑映射 $f : \sigma_r \to M$ 的像 $s_r = f(\sigma_r)$ 定义;

i. $r-$ 维链: 设 $\{s_r^j\}$ 是 M 中的 $r-$ 维单形之集, 则 $r-$ 维链为 $c_r = \sum\limits_j a_j s_r^j, a_j \in R$;

ii. 链群: M 中的 $r-$ 维链全体形成链群 $C_r(M)$;

iii. 边缘: 在映射 $f : \sigma_r \to M$ 下, $\partial\sigma_r$ 被映成 M 的子集 $f(\partial\sigma_r)$, 记为 ∂s_r, 它构成 M 中的 $(r-1)-$ 维单形, 叫做 s_r 的边缘;

A. 线性: $\partial : C_r(M) \to C_{r-1}(M)$;

B. 幂零性: $\partial^2 = 0$;

iv. 边缘链群: 由 $\partial c_r = 0$ 定义的 $r-$ 维闭链全体构成闭链群 $Z_r(M)$, $r-$ 维边缘链 ∂c_{r+1} 全体形成的边缘链群 $B_r(M)$ 是 $Z_r(M)$ 的子群;

(b) 流形 M 上的 $r-$ 阶奇异(下)同调群: $H_r(M) = Z_r(M)/B_r(M), 0 \leq r \leq \dim M$;

i. 奇异同调群与多面体同调群在是当拓扑条件下是同构的;

(c) 微分形式在链上的积分: 设 $\omega \in \Omega^r(M)$, $s_r = f(\sigma_r)$ 为 $r-$ 维单形, $c_r = \sum_j a_j s_r^j \in C_r(M)$ 是任一 $r-$ 维链, 有 $\begin{cases} \int_{s_r} \omega = \int_{\sigma_r} f^*\omega \\ \int_{c_r} \omega = \sum\limits_j a_j \int_{s_r^j} \omega = \sum\limits_j a_j \int_{\sigma_r^j} f^*\omega \end{cases}$ (f^* 是 $\mathbb{R}^r$ 中的 r

i. Stocks 定理: $\forall \omega \in \Omega^{r-1}(M), c \in C_r(M)$, 有 $\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$ 成立;

A. $r-$ 维链 c 上的积分: $< \omega, \cdot >: C_r(M) \to R, c \mapsto < \omega, c > = \int_c \omega$;

B. Stocks 定理表明外导数 ∂ 是上边缘算子;

(d) 上同调群: 流形 M 上的 $r-$ 维 de Rham 上同调群定义为闭的 r 形式全体 $Z^r(M)$ 模掉恰当的 $r-$ 形式全体 $B^r(M)$, $H^r_{dR}(M,\mathbb{R}) = Z^r(M)/B^r(M), 0 \leq r \leq \dim M$. 其中 $Z^r(M) = Ker\{d : \Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)\}, B^r(M) = Im\{d : \Omega^{r-1}(M) \to \Omega^r(M)\}$;

  i. 两个 $r-$ 阶闭形式是同调等价的, $\omega \sim \omega'$, 如存在恰当的 $r-$ 形式 $d\alpha$ 使得 $\omega' = \omega + d\alpha$, 同调等价类记为 $[\omega]$, 生成 $H^r_{dR}(M)$;

  ii. 同调类的双线型: $H^r_{dR}(M) \times H_r(M) \to \mathbb{R}, < [\omega],[c] >=< \omega, c >$;

(e) de Rham 定理: 若 M 紧致, 则 $H_r(M), H^r_{dR}(M)$ 的维数有限, 且双线型 $< [\omega],[c] >$ 非退化 (张成矩阵的行列式不等于 0). 因此 $H^r_{dR}(M)$ 是 $H_r(M)$ 的对偶向量空间;

  i. 在 $H_r(M)$ 中任取一组基 $[c_i], 1 \leq i \leq b_r$; 同调等价类相应的代表元为 $c_1, ..., c_{b_r} \in Z_r(M)$:

    A. 非退化性: 若 $< [\psi],[c_i] >= 0, 1 \leq i \leq b_r$, 则 ψ 必然是零调的. 即闭的 $r-$ 形式 ψ 是恰当的, $iff \int_{c_i} \psi = 0, 1 \leq i \leq b_r$;

    B. 对偶基的存在性: $\exists[\omega_i] \in H^r_{dR}(M)$, 使得 $\int_{c_i} \omega_j = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq b_r$;

  ii. 傅立叶技巧: $\forall u_1, ..., u_{b_r} \in \mathbb{R}, \exists \omega \in Z^r(M)$ 使 $\int_{c_i} \omega = u_i, 1 \leq i \leq b_r$, 只需令 $\omega = \sum\limits_i u_i \omega_i$;

(f) 同伦: 设 X, Y 是拓扑空间, 称连续映射 $f, g : X \to Y$ 是同伦的, 若存在一个连续映射 $H : X \times [0,1] \to Y$ 使得 $\forall x \in X, H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x)$;

  i. 伦移: 函数 H 称为从 f 到 g 的一个伦移, 即映像经过连续形变 $f(X) \to g(X) \subset Y$;

  ii. 同伦等价: 连续映射 $f_0 : X \to Y$ 与 $f_1 : X \to Y$ 同伦等价的记号: $f_0 \simeq f_1 : X \to Y$;

(g) 拓扑空间的同伦: 拓扑空间 X, Y, 连续映射 $f : X \to Y, g; Y \to X$, 满足 $g \circ f \simeq Id_X, f \circ g \simeq Id_Y$, 则称 X 与 Y 之间同伦, 记作 $X \simeq Y$;

  i. 同胚的拓扑空间是同伦等价的, 但反之不成立;

(h) 可缩空间: 存在常值映射 $pr : X \to X, \forall x \in X, pr(x) = x_0$ 同伦于恒等映射 $Id : X \to X$, 则称 X 为可缩空间;

(i) Poincare 引理: 若流形 M 的一个坐标邻域 U 是可缩的, 那么 U 上的任何闭形式必然是恰当的: $\forall\omega\in\Omega^r(U), d\omega=0\Rightarrow\exists\alpha\in\Omega^{r-1}(U), \omega=d\alpha$;

i. 对于可缩空间 $\mathbb{R}^n$, 其上的微分形式皆为恰当形式 $H^r_{dR}(\mathbb{R}^n)=0, 1\leq r\leq n$, 由连通性知 $H^0_{dR}(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}$;

ii. 一个恒等式: $\forall\omega\in\Omega^r(N), dPH^*\omega+PH^*d\omega=g^*\omega-f^*\omega$;

iii. 若 $f,g:M\to N$ 是互为同伦的映射, 则它们各自诱导的线性映射 $f^*,g^*:H^r_{dR}(N)\to H^r_{dR}(M)$ 相等, 即 $f^*=g^*$;

(j) 单连通流形 M 上的任一闭 $1-$ 形式 ω 沿曲线 $\gamma(x_0,x)$ 的积分只依赖于端点 x_0 和 x, 当 x_0 固定而 x 在 M 中变动时, $f(x)=\int_{\gamma(x_0,x)}\omega$ 是单值函数, $df=\omega$, 故 $H^1_{dR}(M)=0$;

11. Poincare 对偶: 设 M 为 $m-$ 维紧致流形, $\partial M=\phi$, 定义双线型 $<\cdot,\cdot>$: $H^r_{dR}(M)\times H^{m-r}_{dR}(M)\to\mathbb{R}$: $<\omega,\eta>=\int_M\omega\wedge\eta, \forall[\omega]\in H^r_{dR}(M), [\eta]\in H^{m-r}_{dR}(M)$;

(a) 表达式与代表元的选择无关;

(b) 该双线型是非退化的, 向量空间的对偶 $H^r_{dR}(M)\cong H^{m-r}_{dR}(M), 0\leq r\leq m$;

(c) $b_r=b_{m-r}$, 故奇数维流形的欧拉示性数为零: $\chi(M)=(b_0+(-1)^m b_m)-(b_1+(-1)^m b_{m-1})+...=0$;

(d) de Rham 上同调类之间的外积: $[\omega]\wedge[\eta]=[\omega\wedge\eta]$;

i. 上同调环: 向量空间的直和 $H^*(M)=\oplus_{r=0}^m H^r(M)$ 中除原有的加法外, 还可以引入外积使 $H^*(M)$ 形成环: $\wedge:H^*(M)\times H^*(M)\to H^*(M)$;

12. Kunneth 公式: 当 $1\leq p\leq r$ 时, $\omega_i^p\wedge\eta_j^{r-p}$ 构成 M 上闭的 $r-$ 形式, 故其等价类描述 $H^r(M)$ 中的一元; 反之, $H^r(M)$ 中的任一元可以用乘积基 $[\omega_i^p\wedge\eta_j^{r-p}]$ 展开, 于是 $H^r(M)=\oplus_{p+q=r}H^p(M_1)\otimes H^q(M_2)\Rightarrow\begin{cases}b_r(M)=\sum\limits_{p+q=r}b_p(M_1)b_q(M_2)\\ \chi(M)=\chi(M_1)\chi(M_2)\end{cases}$;

5 同伦群

1. 保基连续映射: 设 Σ, X 是拓扑空间, 分别取定"基点"$\sigma_0 \in \Sigma, x_0 \in X$, 若映射 $f: \Sigma \to X$ 是保持基点的, 即 f 满足 $f(\sigma_0) = x_0$, 则称其为保基连续映射;
   (a) 保基连续映射 $f: \Sigma \to X$ 全体记作 $X^\Sigma = \{f | f: \Sigma \to X, f(\sigma_0) = x_0\}$;
   (b) 保基映射 $f: \Sigma_2 \to \Sigma_1$ 及 $g: X_1 \to X_2$ 诱导了 $X_1^{\Sigma_1} \to (g^f) \to X_2^{\Sigma_2}, g^f: X_1^{\Sigma_1} \to X_2^{\Sigma_2}, \forall h \in X_1^{\Sigma_1}, g^f(h) = g \circ h \circ f$;
2. 映射 g^f 的基本性质:
   (a) 若 $f': \Sigma_3 \to \Sigma_2, g': X_2 \to X_3$ 是保基映射, 则 $g'^{f'} \circ g^f = (g' \circ g)^{f \circ f'}: X_1^{\Sigma_1} \to X_3^{\Sigma_3}$;
   (b) 若 $f_1 \simeq f_0: \Sigma_2 \to \Sigma_1, g_1 \simeq g_0: X_1 \to X_2$, 则 $g_1^{f_1} \simeq g_0^{f_0}: X_1^{\Sigma_1} \to X_2^{\Sigma_2}$;
3. 如果 $\Sigma_1 \simeq \Sigma_2, X_1 \simeq X_2$, 那么 $X_1^{\Sigma_1} \simeq X_2^{\Sigma_2}$:
   (a) $\Sigma_1 \simeq \Sigma_2 \Rightarrow \begin{cases} f: \Sigma_2 \to \Sigma_1 \\ f': \Sigma_1 \to \Sigma_2 \end{cases}, f \circ f' \simeq Id, f' \circ f \simeq Id$;
   (b) $X_1 \simeq X_2 \Rightarrow \begin{cases} g: X_2 \to X_1 \\ g': X_1 \to X_2 \end{cases}, g \circ g' \simeq Id, g' \circ g \simeq Id$;
   (c) $g^f: X_1^{\Sigma_1} \to X_2^{\Sigma_2}, g'^{f'}: X_2^{\Sigma_2} \to X_1^{\Sigma_1}$;
4. 道路空间总是可缩的: $X^{[0,1]} \simeq X^{\{1\}} \simeq \{f_0\}$;
5. 加接: X 在 $f(Z)$ 处与 Y 的加接定义为 $X \cup Y / \sim$, 记为 $X \cup_f Y$;
6. 楔积: 取基点 $x \in X, y \in Y$, 楔积 $X \vee Y = (X \cup Y)/(x \sim y)$;
   (a) $X \vee Y$ 可看作乘积空间 $X \times Y$ 的子集 $(X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$;
7. 给定拓扑空间 X_j, Y_j 及连续保基映射 $f_j: X_j \to Y_j (j \in J)$, $\exists \vee_{j \in J} f_j: \vee_{j \in J} X_j \to \vee_{j \in J} Y_j$ 具有下面的性质:

(a) 若 $g_j; Y_j \to Z_j (\forall j \in J)$ 是连续保基的, 则 $(\vee_{j\in J} g_j) \circ (\vee_{j\in J} f_j) = \vee_{j\in J}(g_i \circ f_j)$;

(b) 若 $f_i \simeq g_j : X_j \to Y_j$ 是同伦等价的映射 $(\forall j \in J)$, 那么 $\vee_{j\in J} f_j \simeq \vee_{j\in J} g_j : \vee_{j\in J} X_j \to \vee_{j\in J} Y_j$;

8. 若 $\forall j \in J, X_j \simeq Y_j$ 是同伦型, 则 $\vee_{j\in J} X_j \simeq \vee_{j\in J} Y_j$;

9. 在 $X \vee Y$ 与乘积空间 $X \times Y$ 的某子集之间存在同胚 $\phi : X \vee Y \to (X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$;

   (a) 映射 ϕ 是满射且单射, 因此是一对一映射, 故存在逆映射 $\phi^{-1} : (X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y) \to X \vee Y$;

10. 归纳积 (旋积): 拓扑空间 X, Y 的旋积定义为 $X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y)$;

    (a) $S^n \wedge S^1 \cong S^{n+1}$;

    (b) $B^n \wedge S^1 \cong B^{n+1}$;

11. 给定拓扑空间 X_j, Y_j 及连续保基映射 $f_j : X_j \to Y_j (j = 1, 2), \exists f_1 \wedge f_2 : X_1 \wedge X_2 \to Y_1 \wedge Y_2$ 具有以下性质:

    (a) 若 $g_j : Y_j \to Z_j (j = 1, 2)$, 则 $(f_1 \wedge f_2) \circ (g_1 \wedge g_2) = (f_1 \circ g_1) \wedge (f_2 \circ g_2)$;

    (b) 如果 $f_j \simeq g_j : X_j \to Y_j$ 是同伦等价的映射 $(j = 1, 2)$, 那么 $f_1 \wedge f_2 \simeq g_1 \wedge g_2 : X_1 \wedge X_2 \to Y_1 \wedge Y_2$;

    (c) 推论: 若 $X_j \simeq Y_j (j = 1, 2)$ 同伦, 则 $X_1 \wedge X_2 \simeq Y_1 \wedge Y_2$;

    (d) 推论: 任意的 X 与可缩空间 Y 的归纳积 $X \wedge Y$ 是可缩的;

12. 约化角锥: 任意拓扑空间 X 的约化角锥 $c(X) = X \wedge [0, 1]$ 是可缩的;

13. 约化双角锥: 拓扑空间 X 的约化双角锥 $s(X) = X \wedge S^1$;

14. 分配律: 设 X, Y, Z 为拓扑空间, 则有 $(X \vee Y) \wedge Z \cong (X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z)$, 推广后得到 $(\vee_{j\in J} X_j) \wedge Y \cong \vee_{j\in J}(X_j \wedge Y_j)$;

15. 结合律: 若 (a)-(c) 满足至少项, 则 $(X \wedge Y) \vee Z \cong X \wedge (Y \vee Z)$;

    (a) X, Y 紧致, 且 X 为 Hausdorff 空间;

    (b) 或者, Y, Z 紧致, 且 Z 为 Hausdorff 空间;

(c) 或者, X, Z 是局部紧致的 Haussdorff 空间;

16. 结合律推论: $S^n \wedge S^m \cong S^{n+m}$;

17. 给定拓扑空间 X, Y, Z:

   (a) 若 X, Y 为 Hausdorff 空间, 则 $Z^{X \vee Y} \cong Z^X \times Z^Y$;

   (b) 若 X 为 Hausdorff 空间, 则 $(Y \times Z)^X \cong Y^X \times Z^X$;

   (c) 若 X, Y 是紧致的 Hausdroff 空间, 则 $Z^{X \wedge Y} \cong (Z^Y)^X$;

18. 圈空间: X 的圈空间定义为 $\Omega(X) = X^{S^1}$;

   (a) $\Omega(\Omega(...\Omega(X)...)) \cong X^{S^1 \wedge S^1 ... \wedge S^1} \cong X^{S^n}$;

   (b) $\Omega(X)^Y = (X^{S^1})^Y \cong X^{Y \wedge S^1} = X^{s(Y)}$;

19. 同伦等价类: 保基映射 $f, g : \Sigma \to X$ 间的同伦 $f \simeq g$ 在 X^Σ 中确定了一个等价关系, 其同伦等价类 $[f]$ 形成的空间为 $[\Sigma, X] = \{[f] | f \in X^\Sigma\} = X^\Sigma / \simeq$, 称为同伦类空间;

   (a) $n-$ 阶同伦群: $\pi_n(X) = [S^n, X]$

20. 设 $f : Y_0 \to Y_1$ 是保基连续映射, 则 f 又到了 $f_\bullet : [X, Y_0] \to [X, Y_1]$, 具有如下性质:

   (a) 若 $f \simeq f' : Y_0 \to Y_1$, 则 $f_\bullet = f'_\bullet ; [X, Y_0] \to [X, Y_1]$;

   (b) 恒等映射 $1 : Y \to Y$ 诱导的 $1_\bullet : [X, Y] \to [X, Y]$ 是恒等映射;

   (c) 若 $g : Y_1 \to Y_2$, 则 $(g \circ f)_\bullet = g_\bullet \circ f_\bullet : [X, Y_0] \to [X, Y_1]$;

   (d) 推论: 如果 $f : Y_0 \to Y_1$ 是一个同伦等价性映射 (即存在 $g : Y_1 \to Y_0$ 使 $f \circ g \simeq 1, g \circ f \simeq 1$), 那么 f 所诱导的映射 $f_\bullet : [X, Y_0] \to [X, Y_1]$ 是 $1 : 1$ 的;

21. 若对于一切拓扑空间 X, $f_\bullet : [X, Y_0] \to [X, Y_1]$ 都是 $1 : 1$ 的, 那么 $f : Y_0 \to Y_1$ 是同伦等价性映射, $Y_0 \simeq Y_1$;

   (a) Whitehead 定理: $\pi_n(Y_0) \cong \pi_n(Y_1), \forall n \geq 0 \Rightarrow Y_0 \simeq Y_1$;

22. 映射 $f : X_0 \to X_1$ 诱导的 $f^\bullet : [X_1, Y] \to [X_0, Y]$ 具有下列性质:

   (a) 若 $f \simeq f' : X_0 \to X_1$, 则 $f^\bullet = f'^\bullet : [X_1, Y] \to [X_0, Y]$;

(b) 恒等 $1 : X \to X$ 诱导的 $1^\bullet : [X, Y] \to [X, Y]$ 是恒等的;

(c) 若 $g : X_1 \to X_2$, 则 $(g \circ f)^\bullet = f^\bullet \circ g^\bullet : [X_2, Y] \to [X_0, Y]$;

23. 若 $f : X_0 \to X_1$ 对一切拓扑空间 Y 给出 $1 : 1$ 对应的 $f^\bullet : [X_1, Y] \to [X_0, Y]$, 则 f 是同伦等价性映射 $X_0 \simeq X_1$;

24. 当 $n \geq 1$ 时, S^n 是 $AH'I-$ 空间 $\Rightarrow \pi_n(X) = [S^n, X]$ 具有群结构 (这个群结构在 $n > 1$ 时是交换群);

25. 若 Y 是局部紧致的 Hausdorff 空间, 则存在 $1 : 1$ 映射 $[X \wedge Y, Z] \leftrightarrow [X, Z^Y]$; 在有群结构的情形下, 该映射为群同构 $[X \wedge Y, Z] \cong [X, Z^Y]$;

(a) $[s(X), Y] \cong [X, \Omega(Y)]$;

(b) $[S^n \wedge Y, Z] \cong [S^n, Z^Y] = \pi_n(Z^Y), \pi_0(Z^Y) = [Y, Z]$;

26. 一些记号: 设 $y \in Y$ 为基点, $f : Y \to Z, g : Y' \to Z'$:

(a) 恒等映射: $1 = 1_Y : Y \to Y$;

(b) 含入映射: $i_1, i_2 : Y \to Y \times Y$;

(c) 常值映射: $e_Y : Y \to Y$;

(d) 对角映射: $\Delta_Y : Y \to Y \times ... \times Y$;

(e) 直积映射: $f \times g : Y \times Y' \to Z \times Z'$;

(f) 投影: $p_1, p_2 : X \vee X \to X, \begin{cases} p_1(x_1, x_2) = x_1 \\ p_2(x_1, x_2) = x_2 \end{cases}$;

(g) 折迭: $\nabla_X : X \vee X \to X, \nabla_X(x, x_0) = \nabla_X(x_0, x) = x$

27. $H-$ 空间 (Hopf 空间): 对拓扑空间 Y, 若存在一个映射 $m : Y \times Y \to Y$ 满足条件 $m \circ i_1 \simeq m \circ i_2 \simeq 1_Y$, 则 Y 被称为 $H-$ 空间;

(a) 用 m 定义 Y 中两点的乘法, 要求乘法单位元为基点 $\forall y, y' \in Y, y \cdot y' = m(y, y') \in Y$;

28. 结合的 $H-$ 空间 ($AH-$ 空间): 若 m 满足 $m \circ (m \times 1_Y) \simeq m \circ (1_Y \times m) : Y \times Y \times Y \to Y$;

29. 有逆元的 $H-$ 空间 ($HI-$ 空间): 若存在逆运算 $u : Y \to Y$ 满足 $m \circ (u \times 1_Y) \circ \Delta_Y \simeq m \circ (1_Y \times u) \circ \Delta_Y \simeq e_Y$;

30. 若 Y 是任意拓扑空间, Y 为 $AHI-$ 空间, 则 $[X, Y]$ 可以赋予一个群结构;

31. 设 Y 为 $AHI-$ 空间, 有任一连续映射 $g : X_0 \to X_1$ 诱导的 $g^\bullet : [X_1, Y] \to [X_0, Y]$ 是群同态;

    (a) 特别的: 当 $g : X_0 \simeq X_1$ 是同伦等价性映射时, $g^\bullet$ 是群同构;

32. 对偶 Hopf 空间: 若拓扑空间 X 存在映射 $\mu : X \to X \vee X$ 满足条件 $p_1 \circ \mu \simeq p_2 \circ \mu \simeq 1_X$, 则称其为对偶 Hopf 空间, 记为 $H'-$ 空间;

33. 结合的 $H'-$ 空间 ($AH'-$ 空间): $(\mu \vee 1_X) \circ \mu \simeq (1_X \vee \mu) \circ \mu : X \to X \vee X \vee X$;

34. 存在逆元的 $H'-$ 空间 ($H'I-$ 空间): 如果存在逆运算 $v : X \to X$ 满足 $\nabla_X \circ (v \vee 1_X) \circ \mu \simeq \nabla_X \circ (1_X \vee v) \circ \mu \simeq e_X$, 则称其为存在逆元的 $H'-$ 空间;

35. 若 X 为 $AH'I-$ 空间, Y 是任一拓扑空间, 则 $[X, Y]$ 可赋予群结构. 由任何连续映射 $g : Y_0 \to Y_1$ 诱导的 $g_\bullet : [X, Y_0] \to [X, Y_1]$ 是群同态. 特别的, 当 $g : Y_0 \simeq Y_1$ 是同伦等价性映射是, $g_\bullet$ 为群同构;

    (a) S^1 是 $AH'I-$ 空间;
    (b) $\pi_1(Y) = [S^1, Y]$ 具有群结构;

36. 设 X, Y 是拓扑空间:

    (a) 若 X, Y 之一为 $AH'I-$ 空间, 则 $X \wedge Y$ 是 $AH'I-$ 空间;
    (b) 如果 X 是 Hausdorff 空间, 那么 Y^X 是 $AHI-$ 空间, 当且仅当 X 为 $AH'I-$ 空间或 Y 为 $AHI-$ 空间;

37. 设 X_1, X_2 都是 $AH'I-$ 空间, 则 $[X_1 \wedge X_2, Y]$ 是交换群;

    (a) 当 $n \geq 2$ 时, $\pi_n(Y)$ 是交换群;

38. 映射锥: 设 X, Y 是拓扑空间, 将其中的 X 看作约化角锥 $c(X)$ 的子空间, $X \doteqdot \{x \wedge 0 | x \in X\}$;

    (a) 其中记号 $x \wedge y$ 表示等价类 $[(x, y)] \in (X \times Y)/(X \vee Y) = X \wedge Y$;

39. 正合序列: 设含入映射 $i : Y \to E$, 令 $f' = \pi_f \circ i : Y \to C_f$, 对于任何拓扑空间 Z, 序列 $[C_f, Z] \xrightarrow{(f')^\bullet} [Y, Z] \xrightarrow{f^\bullet} [X, Z]$ 是正合的;

6 同伦群的初等计算

1. Hurewicz 定理:

   (a) 若 X 连通, $\pi_0(X)=0$, 则 $H_1(X,\mathbb{Z})\cong\pi_1(X)/[\pi_1(X),\pi_1(X)]$(基本群的阿贝尔化);

   (b) 设 $n>1$, 若 X 具有 $(n-1)-$ 连通性, 即 $\pi_0(X)=\pi_1(X)=...=\pi_{n-1}(X)=0\Rightarrow\pi_n(X)\cong H_n(X,\mathbb{Z})$;

   (c) 球面上 $\pi_n(S^n)\cong\mathbb{Z}$;

2. Hopf 纤维化: $S^1\hookrightarrow S^3\xrightarrow{p}S^2$, 细节如下:

   (a) S^3,S^2 分别嵌入 $\mathbb{C}^2$ 及 $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ 中 $\begin{cases}S^3:|z_0|^2+|z_1|^2=1 & (z_0,z_1)\in\mathbb{C}^2\\ S^2:|z|^2+x^2=1 & (z,x)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}\end{cases}$;

   (b) 如下定义的映射 $p:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ 实际上给出了 $p:S^3\to S^2$: $\begin{cases}p(z_0,z_1)=(2z_0z_1^*,|z_0|^2-|z_1|^2)\\ |2z_0z_1^*|^2+(|z_0|^2-|z_1|^2)^2=(|z_0|^2+|z_1|^2)^2\end{cases}\Rightarrow\forall(z_0,z_1)\in S^3\subset\mathbb{C}^2$, 有 $p(z_0,z_1)\in S^2\subset\mathbb{C}\times\mathbb{R}$;

   (c) 取定 $(z,x)\in S^2$, $p(z_0,z_1)=(z,x)$ 的原像 (z_0,z_1) 构成 S^1: $\begin{cases}2z_0z_1^*=z\\ |z_0|^2-|z_1|^2=x\end{cases}\xLeftrightarrow{z_j'=e^{i\theta}z_j}\begin{cases}2z_0'z_1'^*=z\\ |z_0'|^2-|z_1'|^2=x\end{cases}$;

3. Hopf 纤维化导出的长正合序列: $...\to\pi_{n+1}(S^1)\to\pi_{n+1}(S^3)\to\pi_{n+1}(S^2)\to\pi_n(S^1)\to\pi_n(S^3)\to...$;

   (a) $n=1$: 因为 $\pi_2(S^3)=\pi_1(S^3)=0$, 所以 $0\to\pi_2(S^2)\to\pi_1(S^1)=0$, 即 $\pi_2(S^2)\cong\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}$;

   (b) $n\geq 2$: 因为 $\pi_{n+1}(S^1)=\pi_n(S^1)=0$, 所以 $0\to\pi_{n+1}(S^3)\to\pi_{n+1}(S^2)\to 0$, 即 $\pi_{n+1}(S^2)\cong\pi_{n+1}(S^3)$;

   (c) 特别的: $\pi_3(S^2)\cong\pi_3(S^3)=\mathbb{Z}$;

7 黎曼几何

1. 度规张量: 设 M 为 $m-$ 维光滑流形, 切空间 T_pM 中的内积是一个非退化且正定的对称双线型 $g_p:T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$. 当 g_p 满足下列性质时,

称其为流形 M 的一个度规张量: $\forall U, V \in T_pM$

(a) 对称性: $g_p(U,V) = g_p(V,U)$;

(b) 正定性: $g_p(U,U) \geq 0$, 等号仅当 $U = 0$ 时成立;

2. 伪黎曼度规: $g_p(U,V) = 0, \forall U \Rightarrow V = 0$;

3. 度规的性质: $g_p(U,V)$ 定义了线性泛函 $T_pM \to \mathbb{R}$, 可看成余切空间的元 $\omega_U \in T_p^*M$:

(a) $< \omega_U, V >= g_p(U,V), \forall V \in T_pM$;

(b) $U \xrightarrow{g_p} \omega_U, g_p : T_pM \cong T_p^*M, g_p \in \mathcal{T}_p(M)^0_2$;

(c) 分量: $g_p = g_{\mu\nu}(p)dx^\mu \otimes dx^\nu, g_{\mu\nu}(p) = g_p\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)$;

4. 无穷小距离:

(a) 欧几里得空间的无穷小距离: 相邻两点 $\vec{y}, \vec{y} + d\vec{y}$ 定义了无穷小距离 $ds^2 = d\vec{y}^2 = \delta_{ij}dy^idy^j = g_{ij}(x)dx^idx^j$, 其中 $g_{ij} = \delta_{kl}\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial y^l}{\partial x^j}$;

(b) 流形上的无穷小距离: 在 m 维微分流形 M 的 p 点附近覆盖以坐标片 $U \cong \mathbb{R}^m$, 局部坐标系 x^μ 下可引进 p 到其临近点的无穷小距离 $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$. 非退化条件为 $\begin{cases} [g_{\mu\nu}]\text{正定} & \mathit{Riemannian} \\ \det[g_{\mu\nu}] \neq 0 & \mathit{pseudo} \end{cases}$;

5. 无穷小变换: 在 m 维微分流形 M 的 p 点附近, 覆盖另一个坐标片 U', 有坐标变换 $x^\mu \to x'^\mu = x'^\mu(x)$. 由 $ds^2 = g'_{\mu\nu}(x')dx'^\mu dx'^\nu$, 其中 $g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}g'_{\alpha\beta}(x')$;

6. 度规的逆变: 用 $g^{\mu\nu}$ 表示 $g_{\mu\nu}$ 的逆矩阵元, 可用 $g^{\mu\nu}$ 提升张量指标 $g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta^\lambda_\mu$;

(a) 逆变的无穷小变换: $g'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}g^{\alpha\beta}(x)$;

7. 欧几里得号差: 在黎曼流形的每一点 p 处, 总是可以找到适当的坐标系将 $g_{\mu\nu}$ 对角化为 $(++...+)$, 称黎曼流形的度量有欧几里得号差;

(a) 注意: 通常不能用同一坐标系对角化不同点的 $g_{\mu\nu}$;

8. Lorentz 号差: 对于伪黎曼流形 $(\det g_{\mu\nu} \neq 0)$, 如果 $g_{\mu\nu}$ 在每一点均能对角化为 $\eta_{\mu\nu} = diag(-+...+)$, 则称该度量具有 Lorentz 号差;

9. 度规分类: 设 $(M, g_{\mu\nu})$ 是 Lorentzian 流形, 向量 $U \in T_p(M)$ 分为:
   (a) 类空向量: $g(U,U) = g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = U^\mu U_\mu > 0$;
   (b) 类光向量: $g(U,U) = U^\mu U_\mu = 0$;
   (c) 类时向量: $g(U,U) = U^\mu U_\mu < 0$;

10. 曲线的长度: 设 $c(a) = p, c(b) = q \in M$ 是曲线 $c = c_{pq}$ 的端点, 用度量确定的曲线长度 $l[c_{pq}] = \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu}(\gamma(t))\frac{d\gamma^\mu(t)}{dt}\frac{d\gamma^\nu(t)}{dt}}dt$;
    (a) 参数化: 在 (U, φ) 中将曲线上的点参数化 $(x^1, ..., x^m) = \varphi \circ c(t)$, $x^\mu = \gamma^\mu(t)$;
    (b) 黎曼流形 $(M, g_{\mu\nu})$ 上两点 p, q 间的距离定义为 $\inf l[c_{pq}]$;

11. 诱导度规: 设 M 为 $m-$ 维流形, N 是一个定义了度量 $\overset{N}{g}_{\alpha\beta}$ 的 $n-$ 维流形. 若 $f: M \hookrightarrow N$ 是子流形 M 到 N 的嵌入映射 $(m \leq n)$, 拉回映射 f^* 诱导了 M 中的度量 $\overset{M}{g} = f^*\overset{N}{g}$, 分量 $\overset{M}{g}_{\mu\nu}(x) = \overset{N}{g}_{\alpha\beta}(y)\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}, y = f(x)$;
    (a) AdS 空间的诱导度量: $ds^2 = \frac{r^2}{L^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{L^2}{r^2}dr^2$;

12. 纳什嵌入定理: 只要 N 足够大, 任何黎曼流形 $(M, g_{\mu\nu})$ 都可以"等度量地"嵌入到 $(\mathbb{R}^N, \delta_{AB})$ 中, 即 $\exists f; M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, $g_{\mu\nu} = (f^*\delta)_{\mu\nu}$, 特别可取 $N \leq \begin{cases} \frac{1}{2}m(3m+11) & M\text{紧致} \\ \frac{1}{2}m(m+1)(3m+11) & M\text{非紧致} \end{cases}, m \equiv \dim M$;

13. Whitney 嵌入定理: 任何 $m-$ 维的光滑流形 M 均可作为子流形嵌入到 $\mathbb{R}^{2m+1}$ 中, 并且浸入到 $\mathbb{R}^{2m}$ 中;

14. 广义协变性: 物理/几何方程在坐标变换 $x^\mu \to x'^\mu$ 下保持形式不变, 实现协变性的方式是用张量场来表达物理/几何量 $T^{\nu_1\cdots\nu_q}_{\mu_1\cdots\mu_p}(x) \to T'_{\mu_1\ldots\mu_p}{}^{\nu_1\ldots\nu_q}(x')= \frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\sigma_p}}{\partial x'^{\mu_p}}\frac{\partial x'^{\nu_1}}{\partial x^{\tau_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\nu_q}}{\partial x^{\tau_q}} \cdot T^{\tau_1\cdots\tau_q}_{\sigma_1\ldots\sigma_p}(x)$;
    (a) 若希望在 M 中建立微分方程, 需考虑偏微商 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, 将产生新的指标 μ, 但该指标一般不协变;

15. 使用协变量的原因: 只需在一个坐标片 $U \cong \mathbb{R}^n$ 中给出 $T^{\nu_1\cdots\nu_q}_{\mu_1\cdots\mu_p}(x)$, 其在临近坐标片 U' 中的行为就完全确定了, 进而可以定义在整个流形 M 上;

16. 联络: 设 M 上存在一个联络, $\Gamma'_{\nu\lambda}{}^{\mu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$;

(a) 联络的分量 $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ 在坐标变换 $x^{\mu} \to x'^{\mu}$ 下将出现非齐次项, 因此不是协变的张量;

17. 协变导数: 在 M 上给定一个联络时, 可以把非协变量 $V^{\mu}_{,\nu}$ 与 $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ 作适当的组合 $\begin{cases} V^{\mu}_{,\nu} \to V^{\mu}_{;\nu} \\ \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \equiv \partial_{\nu} \to \nabla_{\nu} \end{cases}$, 以抵消破坏协变性的非齐次项. 由此定义协变导数 $\nabla_{\nu} V^{\mu} = V^{\mu}_{;\nu} \equiv V^{\mu}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} V^{\lambda} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} V^{\lambda}$;

    (a) 余切空间的协变导数: $V_{\mu:\nu} = \nabla_{\nu} V_{\mu} \equiv V_{\mu,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu,\nu} V_{\lambda} = \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} V_{\lambda}$;

    (b) 张量场的协变导数: $\nabla_{\lambda} T^{\cdots\nu\cdots}_{\cdots\mu\cdots} = \partial_{\lambda} T^{\cdots\nu\cdots}_{\cdots\mu\cdots} - \ldots - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu} T^{\cdots\nu\cdots}_{\cdots\kappa\cdots} - \ldots + \ldots + \Gamma^{\nu}_{\lambda\rho} T^{\cdots\rho\cdots}_{\cdots\mu\cdots} + \ldots$;

18. 仿射联络: 设 $\mathcal{F}(M), \mathcal{X}(M)$ 分别是流形 M 上的光滑函数和光滑向量场, 组成的空间, 可以抽象地定义仿射联络为满足下面公理的双线型映射 $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M), (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$: $\forall f \in \mathcal{F}(M), X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$

    (a) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

    (b) $\nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$;

    (c) $\nabla_{(fX)} Y = f \nabla_X Y$;

    (d) $\nabla_X (fY) = X[f] Y + f \nabla_X Y$;

19. 联络系数: $\forall p \in M$, 取坐标片 (U, φ), $x = \varphi(p) \in \mathbb{R}^m$, 并设 $e_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ 是 $T_p M$ 的坐标基. m^3 个联络系数 $\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} \in \mathcal{F}(M)$ 定义为 $\nabla_{\mu} e_{\nu} \equiv \nabla_{e_{\mu}} e_{\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} e_{\lambda}$;

    (a) 一旦给出 ∇ 对基底的作用, 即可确定 $\nabla_V W, \forall V, W \in T_p M$. 即 $\nabla_V W = \nabla_{(V^{\mu} e_{\mu})} (W^{\nu} e_{\nu}) = V^{\mu} \nabla_{e_{\mu}} (W^{\nu} e_{\nu}) = V^{\mu} (e_{\mu}[W^{\nu}] e_{\nu} + W^{\nu} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} e_{\lambda}) = V^{\mu} \left(\frac{\partial W^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} W^{\nu} \right) e_{\lambda}$;

    (b) 协变量的分量形式: $\nabla_{\mu} W^{\lambda} \equiv \frac{\partial W^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} W^{\nu}$;

    (c) Leibnitz 法则: $\forall f \in \mathcal{F}(M)$, 令 $\nabla_X f = X[f]$, 则有 $\nabla_X (f \cdot Y) = \nabla_X f \cdot Y + f \cdot \nabla_X Y$;

        i. 推广到一般张量: $\nabla_X (T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2)$;

        ii. 分量形式: $\nabla_{\mu} (T^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\nu\cdots} \cdot \tilde{T}^{\cdots\rho\cdots}_{\cdots\kappa\cdots}) = (\nabla_{\mu} T^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\nu\cdots}) \cdot \tilde{T}^{\cdots\rho\cdots}_{\cdots\kappa\cdots} + T^{\cdots\lambda\cdots}_{\cdots\nu\cdots} \cdot \nabla_{\mu} \tilde{T}^{\cdots\rho\cdots}_{\cdots\kappa\cdots}$;

(d) 不同坐标片 $U\cap V\neq\phi$ 中的联络系数变换关系: $x^\mu\to x'^\mu$;

i. $e_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}, e'_\mu=\frac{\partial}{\partial x'^\mu}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}e_\alpha$;

ii. $\nabla_{e'_\mu}e'_\nu={\Gamma'}_{\mu\nu}{}^{\lambda}e'_\lambda=\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\lambda}{\Gamma'}_{\mu\nu}{}^{\lambda}e_\gamma$, 且 $\nabla_{e'_\mu}e'_\nu=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\nabla_{e_\alpha}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}e_\beta\right)=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\nabla_{e_\alpha}e_\beta+\frac{\partial^2x^\beta}{\partial x'^\mu\partial x'^\nu}e_\beta$;

iii. ${\Gamma'}_{\mu\nu}{}^{\lambda}=\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}+\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma}\frac{\partial^2x^\gamma}{\partial x'^\mu\partial x'^\nu}$;

20. 方向导数: 对于欧式空间 $M=\mathbb{M}^m$, 此时 $T_pM\cong M$, 即流形上的点 $x\in M$ 和切向量 $X,Y\in T_pM$ 都是 $\mathbb{R}^m$ 中的向量. 方向导数定义为 $\nabla_XY=\lim\limits_{\epsilon\to0}\frac{Y(x+\epsilon X)-Y(x)}{\epsilon}=X^\mu\partial_\mu(Y^\nu)\partial_\nu$, 其是 $\mathbb{R}^m$ 上的联络;

(a) 特别的有: $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}e_\lambda=\nabla_{e_\mu}e_\nu=0\Rightarrow\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=0$;

(b) 推论: $\mathbb{R}^m$ 上存在零联络 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=0$;

21. 平行: 设 $c:[a,b]\to M, t\mapsto c(t)$ 是 M 中连结 $p=c(a)$ 和 $q=c(b)$ 的一条光滑曲线, 取坐标片 (U,φ), 曲线的参数方程为 $x^\mu=\gamma^\mu(t)$, 其中 $\begin{cases}(\gamma^1(t),...,\gamma^m(t))\equiv\varphi\circ c(t)\\ \gamma^\mu(a)=p^\mu\\ \gamma^\mu(b)=q^\mu\end{cases}$, 切向量满足 $\begin{cases}\dot\gamma(t)=\dot\gamma^\mu\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_{c(t)}\\ \dot\gamma^\mu=\frac{d\gamma^\mu(t)}{dt}=\frac{dx^\mu}{dt}\end{cases}$. 若 X 满足 $\begin{cases}\nabla_{\dot\gamma(t)}X=0 & \forall t\in[a,b]\\ \dot\gamma^\mu(t)\left(\frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\mu}+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}X^\nu\right)=0 & \Rightarrow\frac{d}{dt}X^\lambda(x)+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{dt}X^\nu(x)=0\end{cases}$, $x^\mu=\gamma^\mu(t)$, 则称 M 上的向量场 X 沿着曲线 $c(t)$ 是平行的;

22. 设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是任意的光滑曲线, $\forall t_0\in[a,b]$ 以及 $X_0\in T_{\gamma(t_0)}M$, 存在唯一的沿 γ 平行向量场 X 满足条件 $X(\gamma(t_0))=X_0$;

(a) 平行移动: $P^\gamma_{t_0,t}:T_{\gamma(t_0)}M\to T_{\gamma(t)}M, X_0=X(\gamma(t_0))\mapsto X(\gamma(t))$;

i. $P^\gamma_{t_0,t}$ 是线性映射;

ii. $P^\gamma_{t_0,t}$ 是可逆映射: $P^\gamma_{t_0,t}\circ P^{-\gamma}_{a+b-t,a+b-t_0}=1, (-\gamma)(s)\equiv\gamma(a+b-s)$;

23. 设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是一条光滑曲线, 满足 $\gamma(t_0)=p$ 及 $\dot\gamma(t_0)=X_0\in T_pM$, 则对于任意向量场 $Y\in\mathcal{X}(M)$, 有 $\nabla_{X_0}Y(p)=\lim\limits_{t\to t_0}\frac{(P^\gamma_{t_0,t})^{-1}[Y(\gamma(t))]-Y(\gamma(t_0))}{t-t_0}$;

24. 测地线: $x^\mu=\gamma^\mu(t)$ 的切向量 $V=\dot\gamma(t)$ 沿着曲线处处平行 $\nabla_VV=0$, 即 $\frac{d^2x^\lambda}{dt^2}+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}=0$;

25. 向量的夹角: 内积 $g_p(U,V)=g_{\mu\nu}U^\mu V^\nu$ 确定向量 $U,V\in T_pM$ 的夹角;
26. 与度量相容的平行移动: 与度量相容的平行移动应保持夹角不变, 即若 $\nabla_{\dot\gamma}U=\nabla_{\dot\gamma}V=0$, 则 $\nabla_{\dot\gamma}[g(U,V)]=0\Rightarrow\nabla_\lambda g_{\mu\nu}=0$;
27. 与度量相容的联络系数: $g_{\mu\nu,\lambda}-\Gamma^\rho_{\lambda\mu}g_{\rho\nu}-\Gamma^\rho_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}=0$;
28. Christoffel 记号: $\left\{ {\kappa \atop \mu\ \nu} \right\}=\frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(g_{\lambda\nu,\mu}+g_{\lambda\mu,\nu}-g_{\mu\nu,\lambda})$;
29. 联络系数对称化和反称化: $\begin{cases}\Gamma^\rho_{(\mu\nu)}\equiv\frac{1}{2}(\Gamma^\rho_{\mu\nu}+\Gamma^\rho_{\nu\mu})\\ \Gamma^\rho_{[\mu\nu]}\equiv\frac{1}{2}(\Gamma^\rho_{\mu\nu}-\Gamma^\rho_{\nu\mu})\end{cases}$;
30. 挠率张量: 联络系数的反称部分被称为挠率张量, 是一个协变量. $T^\rho_{\mu\nu}\equiv 2\Gamma^\rho_{[\mu\nu]}=\Gamma^\rho_{\mu\nu}-(\mu\leftrightarrow\nu)$;
31. 挠率: $T:\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\to\mathcal{X}(M)$, 定义为 $T(X,Y)=\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y],\forall X,Y\in\mathcal{X}(M)$;
    (a) 挠率的分量: $T^\lambda_{\mu\nu}=\left\langle dx^\lambda,T(e_\mu,e_\nu)\right\rangle$, 为 $(2,1)-$ 型张量;
    (b) 挠率张量 $T^\lambda_{\mu\nu}$ 是挠率 T 在标准基底下的分量;
32. Contorsion 张量: $K^\kappa_{\mu\nu}\equiv\frac{1}{2}(T^\kappa_{\ \mu\nu}+T_{\mu\ \nu}^{\ \kappa}+T_{\nu\ \mu}^{\ \kappa})$;
    (a) 联络系数可表示为 $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}=\left\{ {\kappa \atop \mu\ \nu} \right\}+K^\kappa_{\mu\nu}$;
33. Levi-Civita 联络: 当联络系数下指标对称时, 挠率为零 (进而 Contorsion 张量为零), 这时与度量相容的联络为 Levi-Civita 联络. 其联络系数等于 Christoffel 记号 $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}=\left\{ {\kappa \atop \mu\ \nu} \right\}=\frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(g_{\lambda\mu,\nu}+g_{\lambda\nu,\mu}-g_{\mu\nu,\lambda})$;
34. 曲线长度: 连结 M 上 p,q 两点的曲线 $x^\mu=x^\mu(t)$ 的长度为 $l[x]=\int_a^b\sqrt{g_{\mu\nu}(x(t))\frac{dx^\mu(t)}{dt}\frac{dx^\nu(t)}{dt}}dt$;
    (a) 最短程线: 由变分原理 $\frac{\delta l[x]}{\delta x^\lambda}=0$ 给出, 即 $\frac{d^2x^\kappa}{ds^2}+\left\{ {\kappa \atop \mu\ \nu} \right\}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}=0$;
        i. 测地线方程中将 $\Gamma^\kappa_{\mu\nu}$ 取 Levi-Civita 联络;
35. 曲率: 流形 M 的取率定义为 $R:\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\to\mathcal{X}(M)$, 即 $R(X,Y,Z)=\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z=[\nabla_X,\nabla_Y]Z-\nabla_{[X,Y]}Z$, $\forall X,Y,Z\in\mathcal{X}(M)$. 曲率张量可以描述空间的弯曲程度;
    (a) 曲率 R 是张量, 具有多重线性 $R(fX,gY,hZ)=fghR(X,Y,Z)$;

(b) 曲率张量的分量: $R(X,Y,Z) = X^\mu Y^\nu Z^\lambda R(e_\mu, e_\nu, e_\lambda) \equiv X^\mu Y^\nu Z^\lambda R^\kappa_{\lambda\mu\nu} e_\kappa$

(c) 曲率为 $(1,3)-$ 型张量,可展开为联络的导数与二次项的组合 $R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} + \Gamma^\kappa_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\nu\lambda} - \Gamma^\kappa_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\lambda}$;

36. Ricci 张量: 一种 $(0,2)-$ 型张量,定义为 $Ric(X,Y) =< dx^\kappa, R(e_\kappa, Y, X) >$, $R_{\mu\nu} = Ric(e_\mu, e_\nu) = R^\kappa_{\mu\kappa\nu}$;

(a) 标量曲率: $R = g^{\mu\nu} Ric(e_\mu, e_\nu) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$;

37. 等度量群: 设 $(M, g_{\mu\nu})$ 是黎曼流形, $f \in Diff(M)$. 等度量群是微分同胚群的一个子群 $Isom(M) := \{f \in Diff(M) | (f^* g)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\}$. 其中 $\begin{cases} f^\mu(x) \approx x^\mu + \xi^\mu(x) + ... \in Diff_0(M) & \xi \in \mathcal{X}(M) \\ (f^* g) \approx g_{\mu\nu} + (\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu} + ... \end{cases}$;

(a) Killing 矢量: 生成等度量群的向量为 Killing 矢量, $(\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$;

(b) 共形 Killing 矢量方程: 在流形 M_{d+1} 中,当时空变换 $f \in Diff(M_{d+1})$ 由无穷小向量场 ξ(称为共形 Killing 矢量场) 生成时, 有 $\delta_\xi g_{ab} \equiv (f^* g)_{ab} - g_{ab} = -(\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a) + O(\xi^2)$. 若时空变换对度量产生了一个 Weyl 因子 $e^{2\omega}$,则 $(f^* g)_{ab} - g_{ab} = (e^{2\omega} - 1) \cdot g_{ab} = 2\omega \cdot g_{ab} + O(\omega^2)$. 生成边界时空对称性的向量场 ξ 应满足共形 Killing 矢量方程 $\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = -2\omega \cdot g_{ab} \Rightarrow \begin{cases} \nabla^a \xi_a = -(d+1) \cdot \omega \\ \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a - \frac{2}{d+1} (\nabla^c \xi_c) g_{ab} = 0 \end{cases}$;

38. 共形平坦: 对于黎曼流形 M, 如果存在坐标系使得其中的度量分量 $g_{\mu\nu}(x) = \rho(x) \eta_{\mu\nu}$,则称黎曼流形 M 是共形平坦的;

39. 活动标架基: 设 M 是一个 $m-$ 维黎曼流形, 其在 p 点的切空间 $T_p M$ 的坐标基为 $e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. 用可逆矩阵转动这些基, 可得新的基底 $\hat{e}_a = e^\mu_a e_\mu = e^\mu_a \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, 其中 $[e^\mu_a] \in GL[m, \mathbb{R}]$, $\det[e^\mu_a] > 0$;

(a) 活动标架的度规: $g(\hat{e_a}, \hat{e}_b) = e^\mu_a e^\nu_b g(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}) = g_{\mu\nu} e^\mu_a e^\nu_b$;

(b) 活动标架的仿射联络: $\Gamma^c_{ab} = e^\mu_a e^c_\lambda (\partial_\mu e^\lambda_b + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} e^\nu_b)$;

(c) 标架基下的挠率: $T^c_{ab} = e^c_\lambda T^\lambda_{\mu\nu} e^\mu_a \hat{e}_b$;

(d) 标架基下的曲率张量分量: $R^a_{bcd} = e^a_\rho R^\rho_{\lambda\mu\nu} e^\lambda_b e^\mu_c e^\nu_d$;

40. Cartan 结构方程: $\begin{cases} d\theta^a + \omega^a_b \wedge \theta^b = T^a \\ d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b = R^a_b \end{cases}$;

    (a) 规范对称性: 度量在局部 Lorentz 转动下不变;

41. 活动标架的 Levi-Civita 联络: $\begin{cases} metricity & \nabla_X g = 0 \\ vanishing\,torsion & \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = 0 \end{cases}$, $\Gamma^c_{ab} = e^c_\lambda e^\mu_a \nabla_\mu e^\lambda_b$;

42. 活动标架的变分规则:

    (a) $\delta_\theta \mathbb{V}_{a_1\ldots a_m} = \delta\theta^b \wedge \mathbb{V}_{a_1\ldots a_m b}$, $\delta_{\omega^L} \mathbb{V}_{a_1\ldots a_m} = 0$;

    (b) $\delta_\theta T^a = d\delta\theta^a + \omega^{La}_b \wedge \delta\theta^b = D^L \delta\theta^a$;

    (c) $\delta_\theta R^{Lab} = 0$;

    (d) $\delta_{\omega^L} T^a = \delta\omega^{La}_b \wedge \theta^b$;

    (e) $\delta_{\omega^L} R^{Lab} = d\delta\omega^{Lab} + \delta\omega^{La}_c \wedge \omega^{Lcd}, -\delta\omega^{Lcd} \wedge \omega^{La}_c = D^L \delta\omega^{Lab}$;

    (f) $\delta_\theta \omega = \delta\theta^a P_a$, $\delta_{\omega^L} \omega = \frac{1}{2}\delta\omega^{Lab} M_{ab}$, $\delta_\theta \hat{R} = \delta_\theta T^a P_a = D^L \delta\theta^a P_a$, $\delta_{\omega^L} \hat{R} = \delta\omega^{La}_b \wedge \theta^b P_a + \frac{1}{2} D^L \delta\omega^{Lab} M_{ab}$. 其中 $\omega = \theta^a P_a + \frac{1}{2}\omega^{Lab} M_{ab}$ 为 Poincare 联络, $\hat{R} := d\omega + \omega \wedge \omega$;

8 复流形

1. 全纯复函数 (解析性): 函数 $f = u(x,y) + iv(x,y)$ 的实部和虚部有适当的光滑性, 并满足柯西-黎曼条件 $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$, 则称其为全纯复函数;

    (a) 对于全纯复函数 $f(x,y)$, 若 $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, 则 f 只依赖 z;

    (b) 多变量的全纯复函数: 设 $(z^1, ..., z^m) \in \mathbb{C}^m$, $z^\mu := x^\mu + iy^\mu$, 复值函数 $f = \mu + i\nu : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ 的全纯性由 $\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \nu}{\partial y^\mu} \\ \frac{\partial \mu}{\partial y^\mu} = -\frac{\partial \nu}{\partial x^\mu} \end{cases}$ 刻画. 若每个分量函数 $f^\lambda (1 \leq \lambda \leq n)$ 都是全纯函数, 则映射 $(f^1, ..., f^n) : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ 是全纯的;

2. 复流形: 满足下面条件的流形被称为复流形;

(a) M 是拓扑空间, 即其中定义了开集 $U, V, ...$;

(b) M 上带有一套坐标卡集 $(U_i \varphi_i)$, 其中 $\{U_i\}$ 构成 M 的一个开覆盖, φ_i 是从开集 U_i 到 $\mathbb{C}^m$ 中某个开集的同胚映射;

(c) 在开覆盖中任取有交叠的开集 U_i, U_j(即 $U_i \cap U_j \neq \phi$), 转移函数 $\psi_{ij} \equiv \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ 是全纯映射;

3. 近复结构: 设 M 是微分流形, 假定其上存在 $(1,1)$ 型张量场 $J = J^A_B(x) \frac{\partial}{\partial \xi^A} \otimes d\zeta^B$, 该类型张量可看作线性算子 $T_pM \xrightarrow{J} T_pM$, $V = V^A \frac{\partial}{\partial \zeta^A} \mapsto < J, V >= J^A_B V^B \frac{\partial}{\partial \zeta^A}$, 则 J 称为 M 上的一个近复结构;